Développer la pensée algébrique dès le préscolaire : quelques exemples de tâches issues *(ou inspirées)* de la recherche

https://elenapolotskaia.com/fr/presentations-selectionnees/

Elena Polotskaia, *UQO*

Valériane Passaro, *Université de Montréal*

Congrès de l'AMQ-Volet primaire
25 octobre 2019

Éducation et Enseignement supérieur Québec

Fonds de recherche sur la société et la culture Québec

Plan de la présentation

1. Le projet de recherche duquel est tiré le contenu de cet atelier: titre, objectifs, méthodologie et équipe.
2. Quelques résultats de recherche intéressants
3. Les concepts racines à la base du développement d'une pensée algébrique
   - La pensée algébrique au préscolaire et au primaire
4. 3 éléments de développement: la pensée relationnelle, la généralisation de suites de motifs, la pensée fonctionnelle
   - Exemples d'activités

Le projet de recherche
Titre

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire.

Le projet de recherche
Objectifs et méthodologie

- Développer une compréhension plus profonde quant aux liens entre le raisonnement algébrique (traditionnellement enseigné au secondaire) et ses racines dans le raisonnement mathématique accessible aux élèves du préscolaire et du primaire.
- Exemplifier des approches et des activités mathématiques pouvant soutenir le développement du raisonnement algébrique-racine et ainsi préparer le succès des élèves dans leur future acquisition de l’algèbre au secondaire.

→ Revue de littérature (sélection de 126 articles sur plus de 1000 articles portant sur le sujet)

Le projet de recherche
L'équipe

Elena Polotskaia, professeure, UQO

Nathalie Anwandter, professeure, UQO

Annie Savard, professeure, Université McGill

Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO

Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO

Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill

Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill

Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill

Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill

Ildiko Pelczer, consultante, Université Concordia

Valériane Passaro, consultante, Université de Montréal

Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Quelques résultats de recherche intéressants…des pratiques efficaces

Calcul arithmétique est prérequis au raisonnement algébrique.
Oui ou Non?

On doit d'abord apprendre à représenter et ensuite à résoudre.
Oui ou Non?

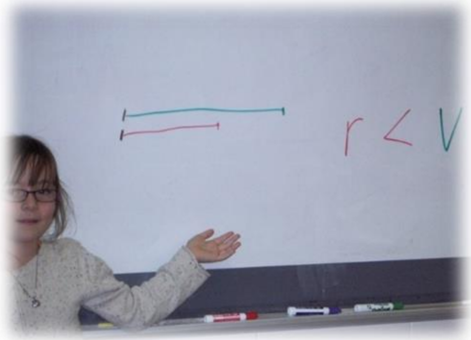
Quelques résultats de recherche intéressants…et parfois déstabilisants!

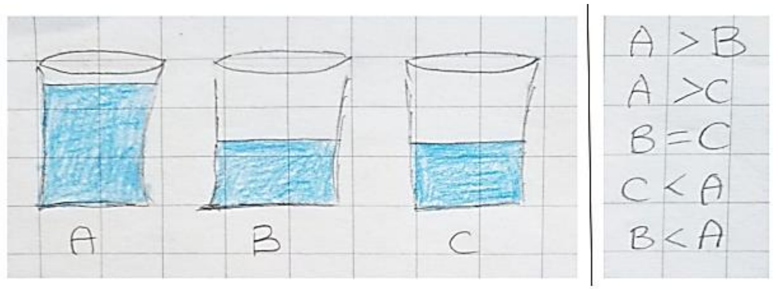
Quelle approche allons-nous promouvoir aujourd'hui?

- L'algèbre comme arithmétique généralisée (vision traditionnelle).
- L'arithmétique et l'algèbre, deux dimensions abordées en parallèle.
- L'algèbre comme base de l'arithmétique.
  - Certains principes algébriques peuvent être travaillés avant l'arithmétique puis soutenir la compréhension en arithmétique et en algèbre.

Exemple d'un travail algébrique qui précède l'arithmétique (approche de Davydov)

- Schématisation des relations





Relations entre les quantités indéterminées

$$a < b$$
$$a = b - x$$
$$x = b - a$$
$$a = b - (b - a)$$
$$c > k$$
$$c = k + x$$

$$\frac{\begin{matrix} A = B \\ K > M \end{matrix}}{A - K \;\_\_\_\_\_\; B - M}$$

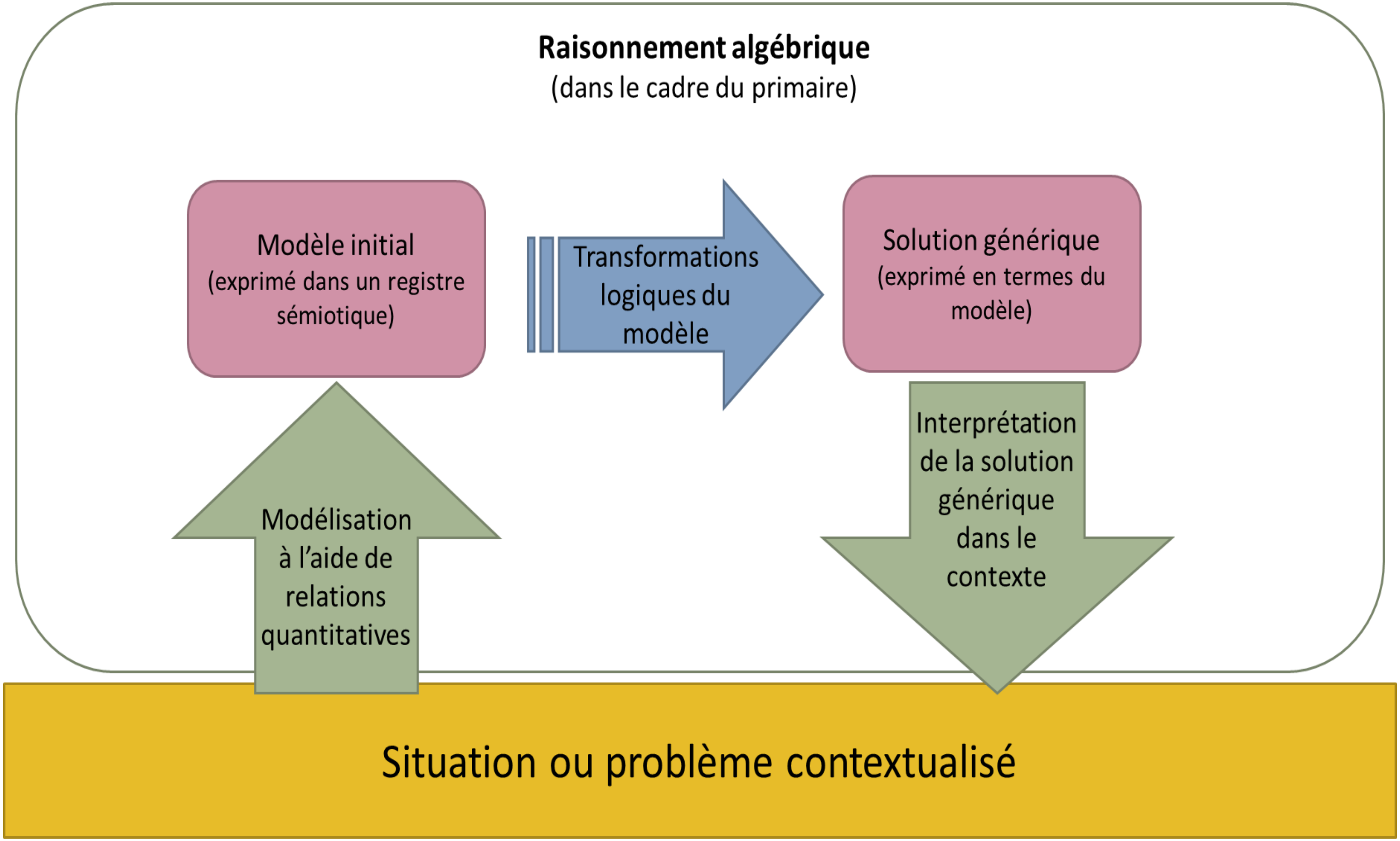
Usage d'un symbolisme pour représenter la comparaison entre des quantités concrètes

Quelques éléments à la base du développement d'une pensée algébrique

- Le sens de l'égalité
- Les modèles et les structures
- Les quantités variables et la covariation
- Le symbolisme
  - La généralisation et la symbolisation sont deux processus qui s'influencent mutuellement dès le jeune âge (Mason, 2008; Wilkie, 2016).

- …il y en a d'autres.

La pensée algébrique
Modèle pragmatique pour l'école primaire



Pensée relationnelle

- Cette composante de la pensée algébrique réfère à l'habileté à voir une situation ou problème comme un ensemble de relations entre les quantités. Elle inclut l'habileté à reconnaitre des relations (ex. une quantité est composée de deux autres quantités ou 5=3+2), les décrire verbalement, les représenter (modéliser). Elle inclut la connaissance des liens entre les relations quantitatives et les opérations arithmétiques (Smith et Thompson, 2008; Polotskaia et Savard, 2018; Davydov, 1990; Carraher et Schliemann, 2018).

La pensée relationnelle
Équivalence et égalité

- **Le jeu de la balance (Lee, Collins et Melton, 2016)**
  - Des objets sont placés sur une balance et le but est de compléter les ensembles d'objets sur les plateaux de droite et de gauche de manière à obtenir un équilibre.

Une version en ligne pour comprendre l'idée:

https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer-basics/latest/equality-explorer-basics_fr.html

On travaille le sens de l'égalité.
L'égalité c'est une équivalence entre deux quantités.

La pensée relationnelle
Inversibilité d'addition

- **Le garage (Lai & al., 2008)**

« Ce matin il y avait *cette* quantité de voitures dans le stationnement. Durant l'après-midi des voitures arrivent et d'autres partent. Regarde bien ce qui se passe et détermine si, à la fin de la journée, il y a *plus*, *moins ou autant* de voiture que ce matin. »

On travaille sur les relations, sur la transformation d'une quantité inconnue.
On peut dégager des principes, par exemple, si on ajoute des voitures et qu'on en enlève autant après alors le nombre de voitures dans le garage ne change pas.

Le garage (Lai et al., 2008)

- ***Transformations possibles :***
  - Ajouter des objets seulement.
  - Retirer des objets seulement.
  - Ajouter un nombre d'objets puis en retirer moins.
  - Ajouter un nombre d'objets puis en retirer plus.
  - Retirer un nombre d'objets puis en ajouter moins.
  - Retirer un nombre d'objets puis en ajouter plus.
  - *Note : Les ajouts se font toujours par la gauche de l'enfant et les retraits par sa droite.*

Variantes de contextes (Baroody et Lai, 2007)

« Voici la maison de Mickey Mouse (la boite). Dans sa maison, il a une assiette avec des biscuits. »

« Minnie Mouse va enlever ou ajouter des biscuits dans l'assiette et après tu devras déterminer si Mickey est content ou non de ce changement. »

Généralisation des motifs

- Cette composante de la pensée algébrique inclut l'habileté à observer les motifs créés dans différents contextes (à l'aide de matériel varié), à reconnaitre leur structure (ce qui se répète d'un élément à l'autre et ce qui change), à décrire verbalement ou modéliser le principe-générateur du motif, à continuer le motif en respectant le principe générateur du motif, à construire les éléments selon leur position dans l'ensemble de motifs, à créer d'autres motifs selon le modèle ou selon la description du principe-générateur (références…).

La généralisation avec des suites de motifs *(growing patterns)*

Travailler les régularités

- Associer, trier, ordonner, identifier des caractéristiques et des attributs




- Pas de besoin de savoir compter pour ordonner ou trier des objets.

- Exemple de l'activité Matreuchka

La généralisation avec des suites de motifs : Quels racines?

Quels sont les principes de base qu'on utilise pour résoudre ce problème?

Pouvez-vous construire la figure 10?

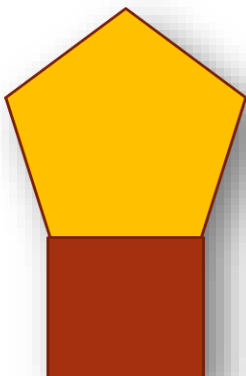


Figure 1

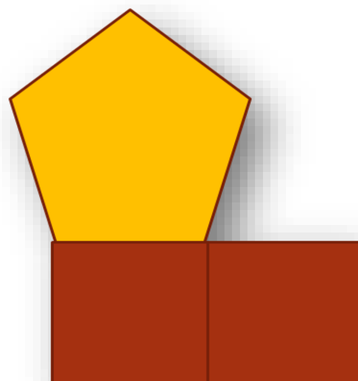


Figure 2

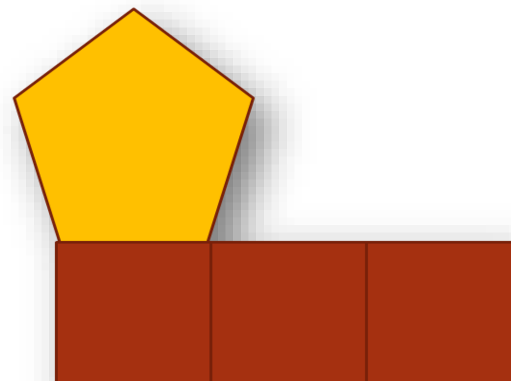


Figure 3

Conservation du nombre, sériation et identification d'un intrus

Introduction à Matreuchka

Conservation du nombre, sériation et identification d’un intrus

Introduction à Matreuchka: NOVICE

1. Sériation

- On veut que l’enfant reconnaisse le principe à la base de l’ordre dans lequel les objets sont organisés. Si l’enfant doit ajouter un objet, il doit se référer à ce principe (selon les caractéristiques de l’objet) pour trouver sa place dans la série.

1. Sériation

1. Sériation (novice)

2. Conservation du nombre

- On veut que l’enfant reconnaisse que la quantité (nombre) ne change pas et reste constante, sous la condition qu’on n’ajoute (ou n’enlève) pas de choses.
- Au début de ces activités, on veut aussi que l’enfant s’appuie sur la comparaison terme à terme ou sur la comparaison directe des objets pour donner du sens à l’égalité.
- Par la suite, l’enfant devrait appuyer son jugement sur le principe et non sur la vérification.

2. Conservation du nombre

3. Intrus

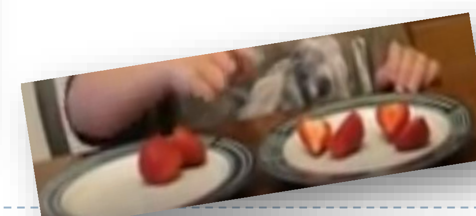
- On veut que l'enfant analyse les objets du point de vue de leurs caractéristiques. Il cherche les ressemblances et les différences. Selon la (ou les) caractéristique(s) choisie(s), différents objets peuvent devenir les intrus.

3. Intrus

Le matériel à imaginer et à créer

eau o eux

raton, papillon, oiseau



Vous pouvez aller chercher les bandes de couleurs chez Réno-Dépôt et les découper

Pensée fonctionnelle.

- Cette composante réfère généralement à la **relation directe** (fonctionnelle) entre deux quantités qui **covarient**. La pensée fonctionnelle permet de reconnaitre de telles relations dans des situations variées (ex. dans des cas de suites de motifs, la relation fonctionnelle peut être la relation entre la position de la figure et le nombre d'éléments composant la figure), de les décrire verbalement, de les exprimer en notation mathématique.
- Différents contextes et situations peuvent être propices à l'étude de relations fonctionnelles (opérations arithmétiques, fonction-machine, situations physiques…).

La pensée fonctionnelle
Changement dans le temps

Observation et description du changement au quotidien: travail qualitatif

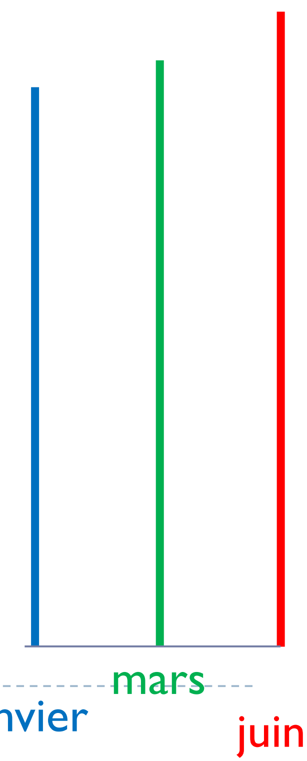
On travaille la covariation.

Exemples:

- Demander aux élèves de mettre en trait au mur chaque mois et de comparer leur taille à celle du mois précédent: « j'ai grandit, ma taille a augmenté » « plus le temps avance plus ma taille est grande ».

- Chaque fois qu'une journée se termine on met un jeton dans une boite: « plus il y a de journées passées plus il y a de jetons » « Il y a autant de journées passées que de jetons dans la boite » « Plus il y a de jetons dans la boite moins il reste d'espace » « Plus il y a de journées passées moins il reste d'espace dans la boite ».

Travail qualitatif: faire parler les enfants et montrer l'exemple en verbalisant.



La pensée fonctionnelle
Relations

Quelle est la relation? (Blanton et al., 2015)

À partir des situations suivantes on demande aux enfants de décrire quelle est la relation entre les deux quantités données.

- Le nombre de chiens et le nombre de nez (truffes) de chiens.
  - Plus il y a de chiens, plus il y a de truffes. Chaque chien a une truffe. Il y a autant de truffes que de chiens.
- Le nombre de jours et le nombre de pièces dans la tirelire de Sarah si Sarah reçoit une pièce par jour de sa grand-mère.
- Le nombre de personnes et le nombre d'oreilles sachant que chaque personne a deux oreilles.
- Le nombre de chiens et le nombre de pattes de chiens sachant que chaque chien a 4 pattes.

Vers un travail quantitatif

La pensée fonctionnelle
Dépendance

Situations concrètes à expérimenter

Exemple (Passaro, 2018):

On observe et on décrit:
Plus il y a de blocs, plus la voiture va loin.
Plus le plan est incliné plus la voiture va rapidement et loin.

La pensée fonctionnelle
Co-dépendance

Situations concrètes à expérimenter

Exemple (Passaro, 2018):

Variante pour travailler la notion de dépendance (inspiré de Vollrath, 1986)

On veut que la voiture arrive à un endroit précis.
- On peut ajouter ou enlever des blocs.
- On pourrait aussi laisser les enfants utiliser d'autres objets (par ex. un livre) pour contrôler la hauteur du plan incliné.

L'endroit où arrive la voiture dépend de la hauteur du plan incliné.

Ressources

- Surveiller les suites du projet
- https://elenapolotskaia.com/fr/pour-les-enseignants/

- Lien pour présentations
- https://elenapolotskaia.com/fr/presentations-selectionnees/

La pensée relationnelle

Travailler le SENS DE L'ÉGALITÉ

Principes et concepts:

- Décomposition (Blanton et al., 2018)
- Compensation (Britt et Irwin, 2008)
- Principe de l'inverse (Lai et al., 2008; Baroody et Lai, 2007)
- Propriétés des opérations (Carpenter et al., 2005)
- Les relations quantitatives (Polotskaia et Savard, 2018)

Activités typiques pour le primaire:

- Modèle de la balance (Warren et Cooper, 2009) ou des mobiles (Papadopoulos, 2019)
- Justification de la validité ou l'invalidité de différentes égalités (Molina et Mason, 2009; Stephens et al., 2013)
- Phrases mathématiques trouées à compléter (Molina et Mason, 2009; Stephens et al., 2013)
- Modélisation des relations pour résoudre des problèmes (Polotskaia et Savard, 2018)

La généralisation avec des suites de motifs *(growing patterns)*

Travailler les régularités

Principes et concepts:

- Associer, trier, ordonner, identifier des caractéristiques et des attributs (Lee, Collins et Melton, 2016)
  - Les régularités sont à la base de l'algèbre.
- Conservation du nombre, sériation et identification d'un intrus (Pasnak et al., 2009)

Types d'activités:

- Compléter une suite, une séquence (chanson, objets, routines de classe, etc.)
- Généraliser en nommant des types d'enchainement (AB, ABC, etc.)

La pensée fonctionnelle

Travailler la variation et la relation de dépendance

Principes et concepts:

- Quantités, grandeurs, covariation, relation de dépendance, correspondance (Blanton et al., 2015)

Type d'activités:

- Observation, description et quantification du changement dans des situations concrètes (Lee, Collins & Melton, 2016): la taille des élèves ou la hauteur d'une plante au fur et à mesure que le temps passe (sans mesure numérique).
- Fonction machine, input-output, les opérations de base vues comme des fonctions

Références

- Baroody, A. J., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition–subtraction inverse principle: A Taiwanese sample, Mathematical Thinking and Learning, 9(2), 131-171. doi:10.1080/10986060709336813
- Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 167–201. doi: 10.1080/10986065.2018.1474534
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy-Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. doi:10.5951/jresematheduc.46.5.0511

- Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 167–201. doi: 10.1080/10986065.2018.1474534

- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2007). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM*, *40*(1), 39–53. doi: 10.1007/s11858-007-0064-x
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, *37*(1), 53–59. doi: 10.1007/bf02655897
- Corral, D., Quilici, J. L., & Rutchick, A. M. (2019). The effects of early schema acquisition on mathematical problem solving. *Psychological Research*. doi: 10.1007/s00426-019-01164-8
- Lai, M.-L., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition–subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, *23*(1), 216-235.
- Lee, K., Ng, S. F., & Bull, R. (2018). Learning and solving algebra word problems : The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Developmental psychology*, *54*(9), 1758.
- Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016) What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education, 92*(4), 305-310. doi: 10.1080/00094056.2016.1208009

Références

- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. *Algebra in the early grades*, 57-94.
- Molina, M., & Mason, J. (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(4), 224-242.
- Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 210-227.
- Passaro, V. (2018, octobre). « Travailler les relations entre deux grandeurs pour amorcer une réflexion sur la dépendance et la variation au primaire ». Congrès annuel de l'Association mathématique du Québec, volet primaire (Montréal).
- Pasnak, R., Kidd, J. K., Gadzichowski, M. K., Gallington, D. A., Saracina, R. P., & Addison, K. T. (2009). Promoting early abstraction to promote early literacy and numeracy. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *30*(3), 239–249. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2008.12.006
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2018) Using the relational paradigm: Effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education,* 20(1), 70-90. doi: 10.1080/14794802.2018.1442740
- *Stephens, A.C., Knuth. E.J., Blanton, L. M., Isler, I., Gardiner, A. M., Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. The Journal of Mathematical Behavior,32*(3), 173-182. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.001
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction : The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 76-95.
- Wilkie, K.J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies In Mathematics, 93*(3), 333-361. Retrieved fromhttps://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x