Annexe IV : Guide - FR

IDENTIFICATION

Chercheur principal : Elena Polotskaia, Université du Québec en Outaouais

Co-chercheurs : Annie Savard, Université McGill

Nathalie Silvia Anwandter Cuellar, Université du Québec en Outaouais

Collaborateurs : Claudine Gervais, Commission scolaire des Grandes-Seigneuries

Marie-Sophie Gélinas, Commission scolaire de la Vallée-des-Tisserands

Valériane Passaro, Université de Montréal

Lidiko Pleczer, Université Concordia

Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO

Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO

Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill

Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill

Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill

Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill

Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Établissement gestionnaire : l'Université du Québec en Outaouais

Titre : La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire.

Numéro du dossier : 264486

Programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires (volet Synthèse des connaissances).

Introduction

Pour beaucoup d'entre nous, le mot algèbre rappelle des équations, des inconnues, des variables et des fonctions - un monde de symboles et de règles utilisées avec ces symboles. Certains diraient que c'était la meilleure partie de leur expérience scolaire, car il s'agissait de suivre strictement les règles et d'en arriver à une réponse. D'autres diraient que c'était la pire de leur expérience, car tous ces symboles et ces règles étaient dépourvus de sens. Pourtant, chacun se rappelle quand et comment il a rencontré l'algèbre au secondaire. Une explication possible serait le changement brusque de la façon de faire des mathématiques en algèbre par rapport à l’arithmétique. Ainsi, trop d’élèves considèrent ce changement radical comme un obstacle.

Le problème du transfert entre l'arithmétique enseignée à l'école primaire et l'algèbre au secondaire est bien connu dans le monde entier (par exemple, Kieran 1989, 2007; Bednarz et Janvier 1993). Afin de remédier à la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre, la recherche des deux dernières décennies s'est concentrée sur l'exploration des possibilités d'introduire des éléments de la pensée algébrique de façon précoce. Les chercheurs (ex. Brizuela et Shliman, 2004; Cai et al., 2011) s'accordent pour dire que le développement de la pensée algébrique chez les élèves du primaire et du préscolaire pourrait contribuer à l'élimination ou à la réduction importante des difficultés d'apprentissage de l'algèbre au niveau secondaire. Cependant, il ressort de nos recherches qu’intégrer l’algèbre au sein de l’arithmétique est moins important que de faire de l’arithmétique de « façon algébrique ». Cela signifie que, tout en effectuant des tâches arithmétiques, les élèves peuvent et doivent penser de manière algébrique. Si les élèves développent cette façon de penser dès les premières années de l’école, ils n’auront pas besoin de la modifier à leur arrivée au secondaire et il n’y aura donc pas de grand écart entre arithmétique et algèbre.

Les recommandations de ce guide correspondent au programme québécois de mathématiques au niveau primaire et au préscolaire et n'impliquent donc pas de changements radicaux des contenus en mathématique à enseigner, mais plutôt un changement dans la manière dont les activités sont réalisées en classe. La nouvelle façon de faire de l'arithmétique, décrite dans ce guide, se caractérise par la priorisation des idées mathématiques fondamentales et générales (faisant partie de l'arithmétique), par un meilleur équilibre entre l'enseignement des opérations arithmétiques d'une part et les structures et relations mathématiques de l'autre, par le rôle important attribué à l'activité de modélisation et par la place accrue accordée à la discussion mathématique en classe. Ainsi, nous expliquons d’abord ce qu’est la pensée algébrique précoce puis nous présentons quelques activités mathématiques susceptibles de permettre le développement de cette pensée chez les jeunes élèves.

Pensée algébrique précoce

Le terme *pensée algébrique* fait référence à la capacité de généraliser différents types de situations en recherchant leurs propriétés et structures essentielles, en exprimant et en communiquant ces idées générales de différentes manières (symbolique, verbale, schématique, etc.). La généralisation est un outil de pensée naturel chez les humains. Comme le dit Mason (2018), « il n'est jamais trop tôt » pour penser algébriquement. Même un enfant de 3 ans peut jouer avec une balance pour peser du sable ou des jouets, pour observer la différence ou pour essayer de faire correspondre le poids de sa poupée à celui d'un ourson. Il peut ainsi généraliser la notion d'équivalence (de poids) (par exemple, Wallace et al., 2010; Davydov, 1982). Il existe de nombreux autres contextes (sans nombre) permettant aux jeunes enfants de s'immerger dans le monde des quantités, de la logique et de la généralisation.

Sur la base de la synthèse des recherches, nous avons identifié cinq composantes importantes de la pensée algébrique initiale. Chaque composante définit un ensemble de tâches possibles qui faciliteraient son développement.

Composante 1. *Généralisation de motifs*.

Cette composante de la pensée algébrique comprend la capacité (1) d'observer des modèles créés dans différents contextes (en utilisant des matériaux variés), (2) de reconnaître leur structure (ce qui se répète d'un élément à l'autre et ce qui change), (3) de décrire ou de modéliser verbalement le principe générateur du modèle. Continuez le motif conformément au principe générateur du modèle, construisez les éléments en fonction de leur position dans le jeu de modèles, créez d'autres modèles en fonction du modèle ou de la description du principe du générateur, créez d'autres modèles et décrivez d'autres principes générateurs.

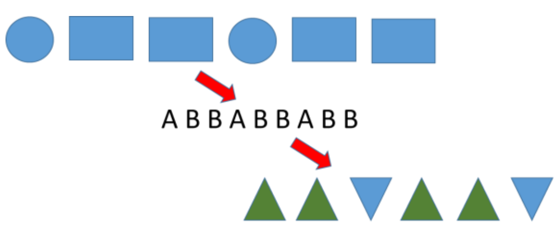


Figure 1 Modélisation et recréation de motifs (Wijns, 2019).

Composante 2. *Pensée relationnelle.*

Cette composante de la pensée algébrique fait référence à l'habileté de voir une situation ou un problème comme un ensemble de relations entre des quantités. Cela inclut la capacité de reconnaître des relations (exemple: une quantité est composée de deux autres quantités, ou 5 = 3

$+ 2$, ou $x + 2 = 5$), décrivez-les verbalement, représentez-les (modèle). Cela inclut la connaissance des liens entre les relations quantitatives et les opérations arithmétiques (par exemple, Polotskaia et Savard, 2018). Cette composante est essentielle pour la modélisation et la résolution de problèmes.

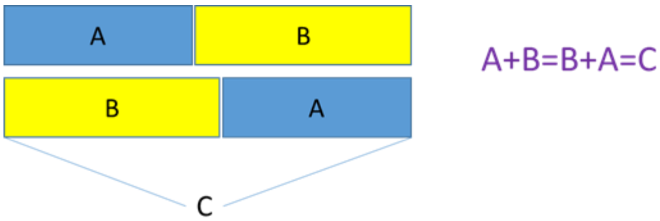


Figure 2 Commutativité de longueurs.

Composante 3. *Pensée fonctionnelle*

Cette composante fait référence à l'appréciation de la relation directe (fonctionnelle) entre deux quantités co-variables (par exemple, Blanton et al., 2015). La relation fonctionnelle permet un déplacement bidirectionnel entre les quantités co-variables. Par exemple, dans la tâche suivante, vous devriez pouvoir établir une relation directe entre le nombre de tables et le nombre de places: recherchez le nombre de tables nécessaire pour 16 (ou 160) personnes ou trouvez le nombre de personnes pouvant être assises autour de 2 (ou 200) tables. $T = (S-2) \div 2$; $S = T \times 2 + 2$. Pour trouver le nombre de sièges autour de 4 tables, on peut faire $4 \times 2 + 2$.

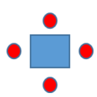
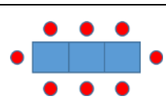
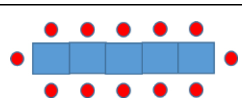
Tables	**Figure**	**Sits**
1		4
2		?
		8
?		16
		

Figure 3 Tableau de valeurs avec des valeurs manquantes

Composante 4. *Pensée récursive*.

Ce type de réflexion permet de lier des éléments consécutifs d'une séquence ou l'exécution successive d'une opération. Par exemple, dans la même tâche avec des tables et des sièges, on peut observer que l'ajout d'une table entraîne l'obtention de deux sièges supplémentaires. $T_{n+1} = T_n + 2$; Pour trouver le nombre de sièges autour de 4 tables, nous pouvons faire 4 + 2 + 2 + 2.

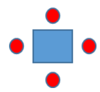
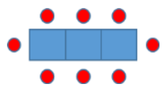
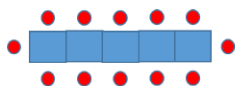
Tables	**Figure**	**Sits**
1		4
2		?
3		?
4		?
5		
…	…	…

Figure 4 Tableau de valeurs consécutives

La différence principale entre la pensée récursive et la pensée fonctionnelle réside dans le fait que la pensée fonctionnelle relie le terme à sa position dans la séquence et que la pensée récursive associe deux termes consécutifs (leurs positions dans la séquence ne sont pas prises en compte). En conséquence, le rayon d'action de la pensée récursive est un pas en avant, mais la pensée fonctionnelle permet d'avancer ou de revenir en arrière sur n'importe quel nombre d'étapes.

Composante 5. *Modélisation.*

Cette composante fait référence à la capacité d'exprimer les propriétés essentielles d'un objet ou d'une situation d'une manière différente de la manière dont il est déjà exprimé. Dans l'exemple plus haut (Figure 1) la séquence de lettres (ABBABBA) exprime bien un mécanisme général générant la suite. Dans le cas ci-dessus de bandes de couleur composant une nouvelle longueur (Figure 2), l'expression C = A + B peut être un modèle de la situation. Dans le même temps, les bandes combinées peuvent servir de modèle à une situation numérique telle que 2 + 3 = 5. Il est important de noter que le modèle est une formalisation des relations essentielles entre les quantités impliquées dans la situation. Ainsi, la modélisation est intimement liée à la pensée relationnelle et à la pensée fonctionnelle. Un aspect essentiel de la modélisation est la reformulation de la situation donnée dans un système de représentation différent (de celui présenté dans la situation). Une telle reformulation nécessite une identification des composantes essentielles et une compréhension approfondie des relations entre elles. La notation par lettre est l'une des nombreuses façons de modéliser des situations. Les recherches suggèrent que ce système d'expression particulier est très puissant et accessible aux enfants dès l'âge de 6 ans (par exemple, Lee, 2006, Davydov, 1982).

Toutes ces capacités de réflexion sont liées au contenu mathématique du programme scolaire bien qu'elles ne soient pas directement mentionnées dans les documents. Par exemple, dans une situation impliquant plusieurs boîtes contenant le même nombre de pommes, il serait très profitable pour l'apprenant de comprendre qu'il existe une relation générale entre le nombre de boîtes et le nombre total de pommes. Sans une telle compréhension, la construction de sens des opérations de la multiplication et de la division est difficilement imaginable. En réalité, la relation entre les boites et le total des pommes est une relation fonctionnelle. Selon la recherche (Daydov, 1982; Pasnak et al., 2009; Smith et Thompson, 2008), les composantes de la pensée algébrique, mentionnés plus haut, peuvent aider les élèves à développer plus efficacement leurs compétences en calcul et ils sont des atouts précieux pour la résolution de problèmes.

À un niveau encore plus fondamental, les chercheurs mentionnent certains principes à la base de toutes les expériences humaines avec le monde quantitatif. Nous appelons ces principes des racines mathématiques, car ils sous-tendent le développement de la pensée mathématique et algébrique. Les enfants s'appuient naturellement sur ces principes et les utilisent de façon implicite dans de nombreuses occasions. Cependant, le but des activités spécialement conçues pour le préscolaire serait de s'assurer que chaque enfant puisse comprendre le principe de manière explicite et qu'il donne un sens approprié et clair aux mots utilisés par les adultes pour communiquer l'idée. Les textes que nous avons analysés mentionnent les principes fondamentaux suivants.

La conservation du nombre et de la quantité fait référence à la compréhension du fait que la numérosité d'un ensemble ne dépend pas du positionnement des éléments, ou que la quantité de substance (argile) ne change pas si on change de forme (ex. Pasnak et al., 2009) .

Le principe de l'intrus fait référence au processus d'identification d'une caractéristique sur la base duquel un certain élément peut être distingué d'un ensemble. Ce processus nécessite une abstraction de l'objet selon plusieurs caractéristiques possibles et une analyse / comparaison de ces caractéristiques avec d'autres éléments de l'ensemble (ex. Pasnak et al., 2009).

Le principe de la sériation fait référence à la reconnaissance du principe sous-jacent à l'ordre dans lequel les objets sont organisés dans une séquence. Si l'on doit insérer un objet, on doit se référer à ce principe (en fonction des caractéristiques de l'objet) pour trouver sa place dans la séquence (ex. Pasnak et al., 2009).

La commutativité de l'addition signifie que le résultat de l'addition (combinaison de quantités) est indépendant de l'ordre dans lequel les quantités ont été ajoutées (ex. Blanton et al., 2015).

L'identité additive fait référence à la compréhension selon laquelle l'ajout ou la suppression (soustraction) de rien (zéro, 0) ne modifie pas la quantité initiale (ex. Blanton et al., 2015).

Le principe la réversibilité de l'addition et de la soustraction (action / annulation) fait référence à la compréhension du fait que la quantité initiale ne changera pas si nous ajoutons une autre quantité puis retirons la même quantité (ex. Lai et al., 2008).

Il y a sûrement plus de principes à découvrir et à développer. Des recherches (Pasnak et al., 2009) ont montré qu'apprendre de telles idées générales aidait les élèves (élèves à risque en première année primaire) à apprendre la numératie et la littératie plus facilement et efficacement.

Tous les chercheurs soutiennent que le développement de la pensée algébrique nécessite un enseignement à long terme soigneusement conçu (sous la forme d'activités bien choisies) ainsi qu'un suivi à long terme des progrès du développement de la pensée des élèves.

Un mot sur l'utilisation des lettres

Les recherches montrent que la difficulté des élèves à interpréter les lettres en algèbre est plutôt artificielle, créée par un programme d'études dans lequel les lettres en mathématiques ne sont utilisées qu'au niveau secondaire. Dans les cas où les lettres ont été utilisées en première année (Lee, 2006, par exemple) pour désigner des quantités (connues ou inconnues), les élèves ont démontré des difficultés semblables, mais seulement **pendant les 3 premières heures de la leçon**! Il existe toujours un moyen d'introduire l'utilisation de lettres à tout moment à l'école primaire sans créer de conflit important avec les apprentissages antérieurs (par exemple, Freiman et al., 2017).

Nous voudrions souligner la différence entre une lettre utilisée dans un contexte mathématique et la notion de variable. Le sens donné à une lettre varie d'une situation à l'autre. Par exemple, si nous désignons le nombre de poulets **maintenant** dans la cour par la lettre c, cela correspond à une quantité inconnue, mais fixe (selon la situation donnée). Ainsi, une lettre dans un contexte mathématique peut parfois désigner une quantité constante connue ou inconnue. Tandis qu'une variable, également marquée par une lettre, est une quantité qui varie, selon le sens de la situation (par exemple, le nombre de poulets dans la cour **varie pendant la journée**).

Nous présentons ensuite une brève description de la manière de traiter une activité comme une activité algébrique, tout en utilisant des lettres ou d'autres outils de modélisation.

Comment transformer une activité arithmétique en une activité algébrique

En général, la construction de la pensée algébrique commence par une situation ou un problème formulé dans un contexte compréhensible pour l'élève en utilisant des objets physiques et leurs propriétés potentiellement mesurables ou quantifiables. Ultérieurement, une description verbale écrite de telles situations peut être utilisée.

La tâche devrait inviter l'élève à analyser les relations entre les quantités et à les modéliser à l'aide de l'un des systèmes de représentation (autre que le contexte). La pensée algébrique se développe au début lorsque la situation est traduite dans le but d'identifier des généralités et des relations. Cette traduction transforme la situation (sa compréhension par l'élève) en un modèle.

Le modèle sert à identifier les transformations possibles et les stratégies de solutions (éventuellement les opérations arithmétiques à effectuer). Les stratégies formulées dans le contexte du modèle permettent de dégager une(des) solution(s) sous une forme générale et ainsi, réutilisable dans d'autres contextes.

La solution générale peut alors être interprétée pour donner un sens au contexte initial. Le passage contexte-modèle-contexte est l'élément crucial de l'apprentissage mathématique pour assurer le développement progressif de la pensée algébrique.

Ainsi, le but principal de toute activité mathématique est de mettre en évidence la structure essentiel d'une situation spécifique et d'utiliser cette structure pour construire une ou plusieurs solutions générales.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, même à 3 ans, un enfant peut jouer avec une balance pour peser du sable ou des jouets, pour observer la différence ou pour essayer de faire correspondre le poids de sa poupée à celui d'une quantité d'eau. Un enseignant compétent peut tirer parti de l'intérêt de l'enfant pour mettre en évidence les propriétés générales impliquées, telles que la poupée pèse moins que l'ourson et donc l'ourson pèse plus que la poupée. Mais si la poupée mange un bonbon, elle pèse la même chose que l'ourson. Plus tard (en 1re année), l'enseignant peut utiliser des lettres (ou des images) pour initier les enfants à la modélisation (P <O). Elle peut même aller plus loin et demander ce qui se passera si la poupée et l'ourson mangent un bonbon chacun. (P + b ? O + b). Ou que se passe-t-il si la poupée pèse le même poids que l'ourson, mais alors la poupée mange une grosse tarte et l'urson mange un petit biscuit? (P = O; T> B; P + T? O + B). Le rôle de l'enseignant est également de familiariser les enfants avec le vocabulaire approprié et d'approfondir leur compréhension de ce vocabulaire. Les activités de balance, si elles sont traitées de cette manière, aideront les élèves à acquérir une compréhension approfondie de l'équivalence et à apprendre les propriétés générales de l'addition et de la soustraction. Ainsi, l'expérience avec les objets physiques, et plus tard avec l'équivalence des nombres jette les bases du travail avec les équations et les inégalités en algèbre.

Lors de la recherche d'une solution générale, les conjectures, les discussions et les démonstrations (preuves) sont des éléments essentiels. La formulation de conjectures nécessite l'imagination des éléments qui ne sont pas visibles immédiatement et de les lier à des caractéristiques explicitement identifiées dans la situation. Grâce à des discussions soigneusement organisées, l'enseignant peut aider les élèves à élaborer des preuves et des arguments pour leurs affirmations - un élément essentiel de l'activité mathématique. Dans ce processus, le rôle de l'enseignant est crucial. L'activité devrait promouvoir la formulation de conjectures et stimuler la discussion par l'utilisation d'arguments et de preuves logiques.

Par exemple, dans le jeu avec une balance, l'enseignant peut demander aux élèves de «prouver» une conjecture de manière logique avant de la vérifier sur la balance réelle. Si la poupée pèse moins que l'ourson et l'ourson pèse moins que l'éléphant, comment pouvons-nous être sûrs que la poupée pèse moins que l'éléphant sans les peser? Les enfants peuvent modéliser la situation en utilisant des barres comme suit.

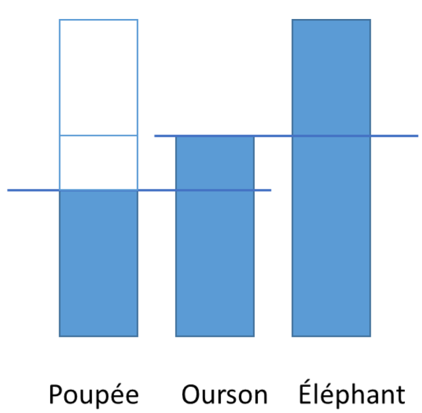


Figure 5 Modèle de la comparaison de poids.

Ils peuvent expliquer: Comme l'ourson pèse plus que la poupée, nous devons ajouter quelque chose à la poupée pour créer un équilibre. Pour équilibrer cela avec l'éléphant, nous devons ajouter un peu plus de poids, car l'éléphant pèse encore plus que l'ourson. Ainsi, afin d'obtenir un équilibre entre la poupée et l'éléphant, nous avons beaucoup ajouté à la poupée. Cela signifie que la poupée pèse moins que l'éléphant.

Les tâches et activités qui permettent aux élèves de proposer plusieurs conjectures, de les réviser et de rechercher les arguments pour justifier leur validité offrent une expérience riche pour les élèves et soutiennent le développement de la pensée algébrique. Telles situations stimulent la formation d'une certaine habitude de pensée dans laquelle les élèves enquêtent, promeuvent et révisent des hypothèses. Ils développent également une compréhension appropriée de la façon dont les mathématiques fonctionnent, y compris le fait que - le plus souvent - les activités mathématiques nécessitent un investissement de longue durée et peuvent ne pas avoir de réponses immédiates ou définitives.

En parlant de tâches arithmétiques, il convient de mentionner en particulier les relations entre les quantités et le sens des opérations arithmétiques. Dans le programme du primaire actuel (sa mise en œuvre dans les écoles), l'accent est mis sur l'étude des opérations arithmétiques, principalement du point de vue de la procédure. Cependant, chaque opération arithmétique ne représente pas seulement une instruction de calcul, mais également une relation entre les quantités concernées. Ce qui réunit l'arithmétique et l'algèbre, c'est l'étude des relations entre les quantités. L'arithmétique s'intéresse davantage aux méthodes de calcul des quantités exprimées par des nombres, tandis que l'algèbre étudie les relations entre les quantités en tant que telles (leurs propriétés). Explorons un cas de problème écrit arithmétique simple du point de vue de la pensée algébrique.

Marta a 2 oranges de plus qu'Olga. Combien d'oranges a Olga, si Marta a 5 oranges?

D'un point de vue arithmétique, il s'agit d'un problème à résoudre en utilisant l'opération de soustraction: 5-2 = 3. Très souvent, l'objectif explicite de ces tâches est d'apprendre l'addition, la soustraction et la pratique du calcul mental. Pour donner plus de sens algébrique à la tâche, l'enseignant peut demander aux élèves de ne penser qu'à la première phrase et d'imaginer d'autres situations concrètes.

Marta a 2 oranges de plus qu'Olga.

Est-il possible qu'Olga ait 2 oranges et que Marta en ait 1? Pourquoi? Olga, peut-elle ne pas avoir d'oranges du tout? Quel peut être le nombre d'oranges d'Olga et d'oranges de Marta? Pouvons-nous modéliser cette situation pour tous les nombres possibles pour Olga et Marta? Pouvons-nous exprimer cette situation en utilisant des lettres? Que signifient ces lettres? Si nous connaissons le nombre d'oranges d'Olga, comment pouvons-nous trouver le nombre d'oranges de Marta? Et si nous connaissons le nombre d'oranges de Marta, comment pouvons-nous trouver le nombre d'oranges d'Olga? Peut-on imaginer d'autres situations similaires lorsque l'on compare deux quantités? Si nous connaissons deux quantités comparées, comment pouvons-nous décrire la situation en termes de comparaison? Dans ces situations, comment pouvons-nous agir pour trouver la différence? Pouvons-nous le montrer dans le modèle précédemment construit ou en utilisant des expressions en lettre?

Ces questions simples révèlent la profondeur mathématique des «simples» problèmes arithmétiques. Nous ne devrions jamais sous-estimer leur potentiel dans le développement de la pensée algébrique. De même, nous ne devrions jamais sous-estimer le potentiel des élèves dans l'apprentissage des mathématiques si des conditions appropriées sont offertes.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques exemples typiques de tâches, proposées par des chercheurs, pour soutenir le développement de la pensée algébrique aux différents niveaux d'apprentissage.

De 3 à 6 ans

La recherche suggère qu'il n'y a jamais trop tôt pour commencer à penser algébriquement. À partir de jeux de balance décrit dans l'introduction, des chercheurs ont expérimenté avec plusieurs autres contextes et concepts. En voici quelques exemples.

Conservation du nombre ou de la quantité: inspiré par (Pasnak et al. 2009)

Le principe de conservation du nombre est à la base de notre compréhension du concept du nombre. Pour aider les jeunes enfants à l'acquérir, ils doivent faire face à des situations spécialement conçues à cet effet et que de bonnes questions soient posées.

On présente à l'enfant un nombre de lapins et un nombre de carottes (environ 6-8). On demande l'enfant de déterminer s'il y a plus de lapins, plus de carottes ou autant de carottes que de lapins. Pour répondre à ces questions, on demande l'enfant de donner **une** carotte à **chaque** lapin. Cette correspondances terme à terme renseigne l'enfant sur la signification des mots « plus que », « moins que », « autant que » (égale, le même nombre, pareille…).

On place les lapins et les carottes vis à vis et on confirme avec l'enfant qu'il y a autant de lapins que de carottes et chaque lapin peut avoir sa carotte (et il n'y aura plus de carottes). On change ensuite la disposition de lapins pour que les lapins occupent plus d'espace sur la table. On répète la question : déterminer s'il y a plus de lapins, plus de carottes ou autant de carottes que de lapins. L'enfant qui maitrise le principe de conservation confirmera l'égalité sans hésitation en expliquant qu'on n'a pas ajouté ni enlevé de lapins. Par contre, l'enfant qui ne maitrise pas ce principe dira qu'il y a plus de lapins. On répète donc la question (Y a-t-il plus de lapins?) et on propose à l'enfant de vérifier si on peut donner une carotte à chaque lapin.

Il ne faut pas s'attendre à ce que l'enfant va maitriser le principe d'un seul coup. Il faut lui proposer régulièrement des situations semblables dans des contextes variés (l'eau dans deux verres identiques, deux morceaux de pâte à modeler etc.). Il faut assurer qu'une méthode compréhensible de vérification est disponible à l'enfant.

Principe de sériation : inspiré par (Pasnak et al. 2009)

Le principe de sériation est à la base de la pensée algébrique, mais il fait aussi fait partie des piliers du raisonnement mathématique.

Pour former une série, on peut utiliser de matériel varié : des bâtonnets de longueurs différentes, des figures pleines d'aires variées, des morceaux de papier colorés avec une intensité de couleur qui varie, etc. On dispose les objets pour que la caractéristique en question (longueur, air, intensité de couleur) change d'un objet à l'autre d'une même façon : elle augmente ou elle diminue.

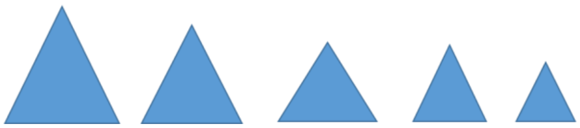


Figure 6 Suite des triangles (aire décroissante)

On invite l'enfant à observer la série en expliquant que les objets sont rangés en ordre. On demande l'enfant de fermer les yeux et on enlève un objet de la série. On dispose les autres objets pour « cacher » la place vide.

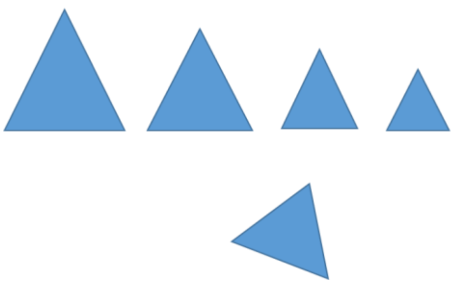


Figure 7 Suite de triangles et un triangle à insérer

On demande l'enfant d'insérer l'objet « à sa place » dans la série. Pour faire le jeu plus équitable, on peut proposer à l'enfant de cacher un objet et ensuite l'adulte va trouver sa place. Évidemment, l'adulte peut se tromper et ainsi donner à l'enfant l'occasion de le corriger et lui donner des explications.

Principe d'intrus : inspiré par (Pasnak et al. 2009)

Le jeu d'intrus aide l'enfant à apprendre l'observation et l'analyse de similitudes et de différences. Pour jouer, on peut choisir les contextes variés : des figures géométriques pleines et des solides, mots et syllabes, le monde de la nourriture ou des animaux etc. On peut profiter de ce jeu pour enrichir le vocabulaire de l'enfant et introduire des notions de base.

Pour jouer, on compose un ensemble de trois objets pour que deux d'entre eux possèdent une caractéristique commune telle que le troisième ne possède pas. On demande l'enfant de trouver quel est l'intrus – l'objet qui ne ressemble pas à deux autres, qui eux sont semblables. On peut combiner les objets de façon qu'il y ait deux ou trois réponses possibles. À chaque fois, on demande à l'enfant d'expliquer sa logique et on en profite pour aider l'enfant à exprimer ses pensées dans un langage (mathématique) correcte. Dans l'exemple ci-dessous, il y a deux cercles (le triangle est un intrus), deux figures oranges (le petit cercle est un intrus) et deux petites figures (le grand cercle est un intrus). Si l'enfant a trouvé une solution, il est important de l'inviter à **penser autrement** pour trouver une autre solution.

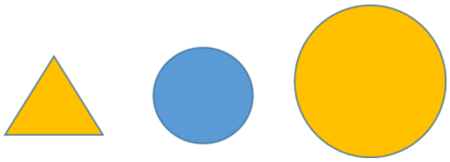


Figure 8 Trouver l'intrus. Il y a trois solutions, selon la grandeur, selon la couleur et selon la forme.

Équivalence : Le jeu des cartes (Blanton et al., 2018)

Des nombres sont représentés sur des cartes sous forme d'une collection d'objets (par exemple, sur la figure 1, des jetons gris et des jetons noirs sont dessinés sur la carte de gauche).

A. On compare deux cartes (donc deux collections).

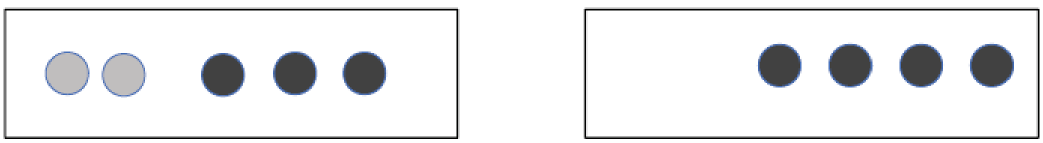


Figure 9 Les cartes avec des cercles

Combien de cercles gris doit-on mettre sur la 2e carte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons sur les deux cartes?

Le but du jeu est de déterminer le nombre de jetons à ajouter sur l'une des cartes pour que les deux collections soient égales. Dans cet exemple, on veut amener l'élève à travailler une égalité du type $a+b=\_\_+c$. On peut évidemment interchanger les cartes de manière à avoir $a+\_\_=c+d$ ou utiliser une seule couleur de jetons de manière à travailler les égalités du type $a=b+c$ ou $b+c=a$.

B. On doit constituer des paires de cartes, une paire étant constituée de deux cartes comportant le même nombre de jetons.

Chaque enfant reçoit une carte avec des jetons gris et des jetons noirs représentés. Il doit retrouver dans la classe un enfant qui a une carte équivalente (qui comporte donc le même nombre total de jetons). On veut amener les élèves à établir des égalités du type $a+b=c+d$. On pourrait aussi débuter le jeu avec des cartes qui ne comportent que des jetons noirs et ainsi travailler l'égalité $a=a$.

Dans ces deux parties du jeu de cartes proposée par Blanton & al. (2018), l'objectif ultime est d'amener les élèves à traduire mathématiquement les égalités établies. Par exemple, lorsqu'un enfant qui a une carte avec 2 jetons gris et 5 jetons noirs et un autre enfant qui a 4 jetons gris et 3 jetons noirs forment une paire, l'enseignant doit amener les enfants à écrire l'égalité établie, soit 2 + 5 = 4 + 3. Il ne s'agit pas de calculer 2+5=7, mais plutôt d'établir l'égalité en utilisant la correspondance terme à terme.

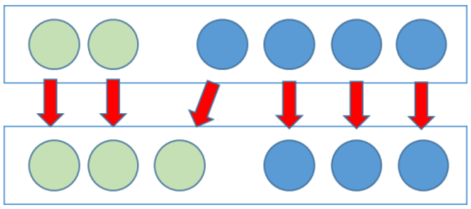


Figure 10 Correspondance un-à-un.

Principe d'inverse addition-soustraction : L'histoire du stationnement (Lai & al., 2008)

Un tapis noir et une boite sont présentés aux enfants. L'enseignant dit que le tapis noir est un stationnement couvert (par la boite opaque) et il glisse quelques voitures sous la boite (entre 4 et 7, au hasard). Il indique qu'on n'a pas besoin de savoir combien il y a de voitures pour jouer à ce jeu. Il débute l'histoire « Ce matin il y avait cette quantité de voitures dans le stationnement. Durant l'après-midi des voitures arrivent et d'autres partent. Regarde bien ce qui se passe et détermine si, à la fin de la journée, il y a plus, moins ou autant de voiture que ce matin. »

L'enseignant effectue alors des transformations de la façon suivante : 1) Il place quelques voitures (entre 2 et 5) à gauche du tapis pendant 3 secondes puis les glisse sous la boite; OU 2) il retire quelques voitures de celles initialement placées sous la boite et les glisse à droite du tapis, il les laisse là pendant 3 secondes puis les enlève. Il pose alors la question aux enfants : « Y a-t-il maintenant plus, moins ou autant de voitures dans le stationnement que ce matin ? »

Variantes de contextes (Baroody & Lai, 2007)

« Voici la maison de Mickey Mouse (la boite). Dans sa maison, il a une assiette avec des biscuits. » L'enseignant place 19 jetons pour représenter les biscuits dans l'assiette puis cache l'assiette avec la boite. « Minnie Souris va enlever ou ajouter des biscuits dans l'assiette et après tu devras déterminer si Mickey est content ou non de ce changement. » En montrant un visage qui sourit (icône), l'enseignant dit que « Si Mickey a plus de biscuits qu'avant, alors il est content. », en montrant un visage neutre il dit que « Si Mickey a le même nombre de biscuits qu'avant, alors il est neutre. », et en montrant un visage triste il indique que « Si Mickey a moins de biscuits qu'avant, alors il est triste. »

Transformations possibles :

- Ajouter des objets seulement.
- Retirer des objets seulement.
- Ajouter un nombre d'objets puis en retirer moins.
- Ajouter un nombre d'objets puis en retirer plus.
- Retirer un nombre d'objets puis en ajouter moins.
- Retirer un nombre d'objets puis en ajouter plus.

Note : Les ajouts se font toujours par la gauche de l'enfant et les retraits par sa droite.

Cycle 1 (6-8 ans)

Ce cycle est (habituellement) caractérisé par l'apprentissage intensif du sens de nombre et des propriétés des opérations (addition et soustraction). Il est donc primordial de complémenter les connaissances arithmétiques avec celles relationnelles.

Modélisation de problèmes (Polotskaia et Savard, 2018; Warren&Cooper-2009).

La résolution de problèmes écrits simples est une excellente occasion d'introduire et pratiquer la modélisation. Avant de présenter le problème dans sa forme habituelle (avec les données numériques, on propose aux élèves une description de la situation sans nombres.

Papa achète des pommes. Maman en achète aussi. Combien ont-ils acheté de pommes en tout?

On demande aux élèves de représenter la situation de façon que l'on puisse l'interpréter dans des cas de données variées. On ne doit donc pas dessiner des pommes une à la fois. Nous pouvons toutefois imaginer les pommes rangées en ligne. On peut placer ces lignes une après l'autre pour « voir » toutes les pommes que papa et maman ont achetées.

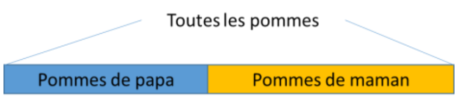


Figure 11 Relation « tout composé de deux parties »

À partir de ce modèle, on peut trouver l'opération à effectuer pour résoudre le problème. Par contre, si c'est le nombre de pommes de maman qui est inconnu, on peut aussi proposer l'opération en se référant au modèle. La force d'une telle modélisation est qu'on peut représenter les nombres inconnus et discuter les stratégies de résolution pour les cas « généraux ».

Dans l'activité de modélisation, il faut veiller à ce que les élèves ne perdent pas de vue le sens attribué aux éléments du modèle. On peut questionner les élèves pour renforcer les liens de sens entre le texte du problème, le modèle et la solution.

- La bande bleue représente quelle donnée du problème?
- Pourquoi nous avons placé les bandes une après l'autre?
- Comment toutes les pommes achetées sont-elles représentées par le modèle?
- Le nombre que tu as trouvé comme réponse au problème représente quoi dans l'histoire? Ou est-il représenté sur le modèle?

Les opérations trouées (Molina&Mason-2009)

Les élèves doivent compléter les phrases mathématiques en remplaçant □ par le bon nombre. Pour y arriver, on peut modéliser (voir plus haut) les expressions ou composer une histoire selon le sens de l'expression.

$8 + 4 = \square + 5$
$\square = 25 - 12$
$14 + \square = 13 + 4$
$13 - 7 = \square - 6$
$\square + 4 = 5 + 7$
$12 + 7 = 7 + \square$

$12 - 4 = 13 - \square$
$9 - 4 = \square - 3$
$\square - 6 = 15 - 7$
$14 - 9 = \square - 10$
$17 - \square = 18 - 8$

Figure 12 Exemples de tâches

On peut modéliser ces expressions comme montré sur la Figure 13 .

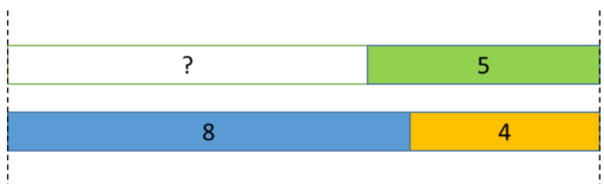


Figure 13 Modéliser l'expression x+5=8+4

On peut aussi composer une histoire :

> *Joe et Sean ont un même nombre de crayons. Joe a 8 crayons noirs et 4 crayons rouges. Sean a quelques crayons noirs et 5 crayons rouges.*

Une partie du travail de l'enseignant consiste à encourager les élèves à verbaliser leurs processus de pensée. Cela a un double objectif: développer leurs compétences en communication mathématique et expliquer leur raisonnement. Par exemple, pour l'équation 8 + 4 = _ + 5, un élève peut ajouter 8 à 4, puis demander quel nombre peut-on ajouter à 5 pour obtenir le même résultat. Cette façon de procéder est procédurale: les opérations sont effectuées séquentiellement jusqu'à ce que l'équation soit réduite à une équation standard. Un autre élève peut considérer 5 comme 4 + 1 et conclure que le nombre manquant doit être égal à 1 de moins que 8. Ou bien, on peut décomposer le 8 en 7 + 1 et effectuer la séquence de transformations 8 + 4 = (7 + 1) + 4 = 7 + (1 + 4) = 7 + 5. Dans les derniers cas, les élèves manifestent une décomposition flexible des nombres, motivée par l'équivalence des quantités des deux côtés de l'équation - des aspects essentiels au développement de la pensée relationnelle.

L'enseignant doit souligner les propriétés, souvent utilisées implicitement par les élèves, lorsqu'il discute de ces stratégies. Dans chaque cas, il faut clairement indiquer la propriété de l'opération sur laquelle reposent ces équivalences. Il est suggéré que les équations soient configurées de manière à nécessiter l'utilisation simultanée d'une propriété spécifique.

Vrai ou faux (Molina &Mason-2009; Carpenter et al, 2005)

Les élèves doivent indiquer si chaque égalité est vraie ou fausse et justifier. Il faut remarquer que le calcul direct n'est pas toujours une meilleure stratégie. Par exemple l'expression 78-16=78-10-6 est vrai parce que des deux côtés on part avec un même nombre (78) et on enlève une même valeur (16=10+6). C'est ce type de stratégie qu'on doit promouvoir chez les élèves.

$72 = 56 - 14$	$7 + 7 + 9 = 14 + 9$
$78 - 16 = 78 - 10 - 6$	$10 - 7 = 10 - 4$
$24 - 15 = 24 - 10 - 5$	$7 + 3 = 10 + 3$
$78 - 45 = 77 - 44$	$62 - 13 + 13 = 65$
$100 + 94 - 94 = 100$	$19 - 3 = 18 - 2$
$27 - 14 + 14 = 26$	$13 + 11 = 12 + 12$
$231 + 48 = 231 + 40 + 8$	$10 + 4 = 4 + 10$
$13 - 5 + 5 = 13$	$0 + 325 = 326$
$51 + 51 = 50 + 52$	$37 + 22 = 300$
$15 - 6 = 6 - 15$	$125 - 0 = 125$
$27 - 14 + 14 = 26$	$7 = 12$
$93 = 93$	$100 - 100 = 1$
$24 - 24 = 0$	

Figure 14 Exemples des expressions

Quelle est la relation? (Blanton et al-2015)

À partir des situations suivantes on demande aux enfants de décrire quelle est la relation entre les deux quantités données.

1) Le nombre de chiens et le nombre de nez (truffes) de chiens.
2) Le nombre de jours et le nombre de pièces dans la tirelire de Sarah si Sarah reçoit de sa grand-mère une pièce par jour.
3) Le nombre de tables carrées et le nombre de personnes qu'on peut asseoir à l'anniversaire de Brady si les tables sont toutes juxtaposées et qu'on assoit les invités face-à-face à chaque table mais qu'on n'assoit personne aux deux extrémités de la tablée.
4) Le nombre de personnes et le nombre d'oreilles sachant que chaque personne a deux oreilles.
5) Le nombre de chiens et le nombre de pattes de chiens sachant que chaque chien a 4 pattes.

6) La taille d’une personne et la hauteur de cette personne lorsqu’elle porte un chapeau qui mesure 30 centimètres de hauteur.

7) Le nombre de fois qu’on coupe un bout de ficelle placé en ligne droite et le nombre de morceaux de ficelles obtenu.

8) Le nombre de bonbons de Marie et John s’ils ont chacun une boite de bonbons contenant le même nombre de bonbons et que Marie en a 3 de plus dans sa boite.

9) Au départ, Sarah a une tirelire qui contient des pièces puis elle obtient 3 autres pièces. Le nombre de pièces dans la tirelire de Sarah avant et après avoir ajouté les 3 pièces.

10) Les âges de Janice et Keisha si Janice a deux ans de moins que Keisha.

11) La longueur d’un mille pattes (en nombre de segments que comporte son corps) et le nombre de jours écoulés si à chaque jour le corps du mille pattes augmente de 2 segments (on ne compte pas la tête).

Cycle 2 (8 à 10 ans)

À cette étape, on continue d'analyser et généraliser des régularités, et de modéliser des relations de plus en plus complexes. Les élèves peuvent commencer à penser en termes de relations fonctionnelles (fonctions) dans certains contextes. Voici quelques activités typiques pour soutenir le développement de la pensée algébrique.

Équations imagées: Papadopoulos & Patsialia, 2018

Dans ce type de tâches, plusieurs relations d'équivalence sont présentées de manière imagée et symbolique (et non sous forme d'équations formelles), comme illustré ci-dessous. (Des idées autres que la balance peuvent être utilisées: la force d'une équipe, la quantité de nourriture que le groupe d'animaux peut manger, etc.)

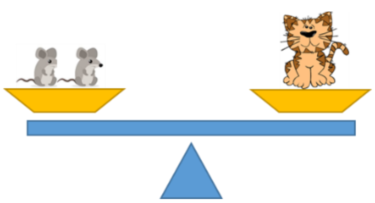


Figure 15 Équivalence imagée

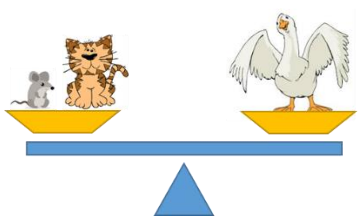


Figure 16 Équivalence imagée

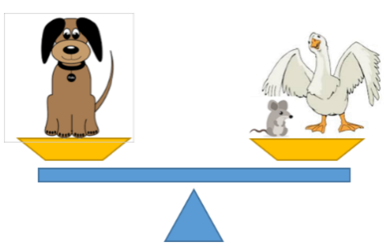
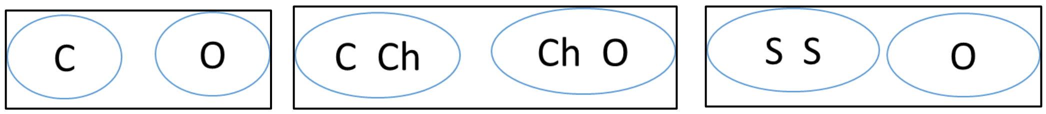


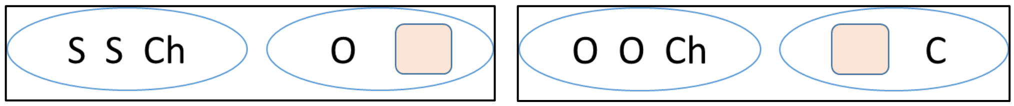
Figure 17 Équivalence imagée

Ensuite, on propose aux élèves trois séries de tâches: a) trouver l'animal manquant pour obtenir équilibre (compensation; b) identifier les éléments qui gardent l'équivalence et c) laisser les élèves créer leurs propres équivalences et problèmes.

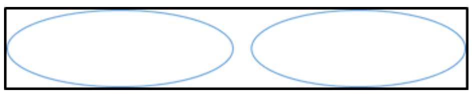
a) Ajoute une souris pour obtenir l'équilibre.



b) Trouve l’animal caché.



c) Crée ta propre balance ou problème et discuteen avec ton ami.



Le but de cette activité est de travailler avec des relations d’équivalence, en utilisant la substitution de certains éléments par d’autres. Un tel processus est utile lors de la résolution d'équations. Ce travail, dans un contexte familier aux élèves, peut les préparer à un travail ultérieur en algèbre. L'enseignant doit demander aux élèves de justifier leur travail en faisant référence aux équivalences existantes. Cette justification a pour avantage que les élèves travaillent avec des relations et non des nombres - pour trouver une solution, ils doivent avoir recours aux équivalences au lieu de faits numériques. Si des lettres sont utilisées, l'enseignant doit préciser la signification de chaque image et chaque lettre qui leur correspondent. Cela peut poser problème dans certaines situations car les élèves pourraient penser que la lettre remplace un animal et non une caractéristique quantifiable qui lui est associée. Pour éviter toute confusion, on doit revenir au sens et au contexte plus souvent. Si le contexte choisi est familier les élèves peuvent plus facilement donner un sens aux relations entre les quantités, ce qui leur permet de travailler avec ces relations au lieu de s’appuyer sur l’expérience quotidienne et les jugements personnels sur les propriétés des animaux.

Idée de la balance : (Warren et al., 2009)

Lorsqu’on travaille avec des équations et des équivalences, une expérience de travail avec la balance physique est bénéfique. La balance peut servir un modèle pour les équivalences exprimées par le signe « = » dans la représentation formelle. Sur une balance physique, il est facile d’observer ce qui se passe si on ajoute (ou enlève) un objet sur un plateau seulement ou si on effectue cette opération simultanément des deux côtés

Tout en s’occupant de l’équilibre, l’enseignant doit souligner la *similitude quantitative* de la situation, c’est-à-dire que les deux côtés sont similaires en termes de quantités et que les deux côtés fournissent de l’information sur cette équivalence (Warren & Cooper, 2005). En ce sens, afin de renforcer l'idée d'équivalence, l'enseignant devrait utiliser davantage le mot « similaire » ou « équivalent » ou « pareil » au lieu du mot « égal », ce dernier ayant une connotation procédurale (« résultat d'une opération »). Dans les tâches de ce type, il est également important d'utiliser trois modes de représentation: un modèle concret (à l'aide d'objets physiques ou une histoire), un modèle imagé et un modèle symbolique.

Une limitation de la référence à la balance physique se présente dans les situations impliquant une soustraction. En se référant à l'équilibre physique, une certaine relation entre les quantités ne peut être exprimée que d'une manière additive (par exemple, le chat pèse autant que la souris et l'oie **ensemble**). Pourtant, on peut exprimer cette relation d'une autre façon. Cependant, à certains stades de développement de la pensée mathématique, l'idée d'équilibre peut toujours être utilisée comme modèle et non comme une référence directe à la balance physique. Vous trouverez ci-dessous un exemple d'utilisation de ce type.

Dans cette activité, on utilise des images de balances pour faire réfléchir les élèves sur les opérations possibles, notamment celles qui préservent l'équivalence, pour retrouver « le poids » de l'objet « inconnu ». On peut utiliser des bandes magnétiques pour construire le modèle de balance sur le tableau et permettre aux élèves de manipuler et justifier leurs stratégies. On peut aussi composer une histoire pour laquelle la balance sera un modèle. Exemple : *Marjorie a acheté trois cœurs de chocolat et une barre qui coute 3$. Elle a payé 18$ en tout.*

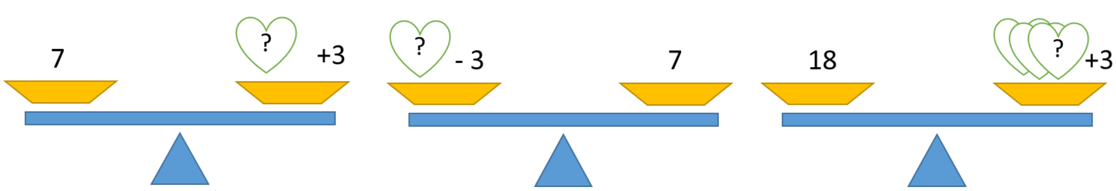


Figure 18 Exemples d'équations formulées en utilisant l'idée de balance.

Résolution de problèmes: (Cai et al, 2011; Polotskaia & Savard, 2018)

Une approche différente de « balance » est proposée par une méthode de modélisation avec des barres ou « Range Tout », également appelée méthode de Singapour (voir aussi l'activité de résolution de problèmes décrite ci-dessus). Dans cette approche, les relations entre les quantités sont traduites en une équation imagée dans laquelleles quantités sont modélisées par des segments ou des barres. L'avantage de cette méthode réside dans la possibilité de «lire» une même relation de trois manières différentes (a = b + c; a – c = b; a – b = c). Au fond, nous restons dans la même forme de représentation, mais l'interprétation des relations varie puisque la quantité de référence change, ajoutant un nouvel aspect à la flexibilité de la pensée. Dans la résolution de problèmes, il est nécessaire de travailler les deux types de flexibilité : 1) le passage entre les différentes formes de représentation (équation, image, objets concrets) et, 2) dans le cadre de la même représentation, la transformation d'une interprétation à une autre en changeant la quantité de référence. La tâche suivante illustre comment cette méthode de modélisation peut être utilisée pour représenter des relations quantitatives données dans un contexte et pour résoudre des problèmes.

> *Raju et Samy ont partagé 410 $. Raju a reçu 100 $ de plus que Samy. Combien d'argent a reçu Samy? (Cai et al., 2011, p.2)*

Ce problème, souvent considéré comme étant algébrique, offre d'excellentes opportunités de développer la pensée relationnelle et algébrique des élèves sans recourir à des outils algébriques formels.

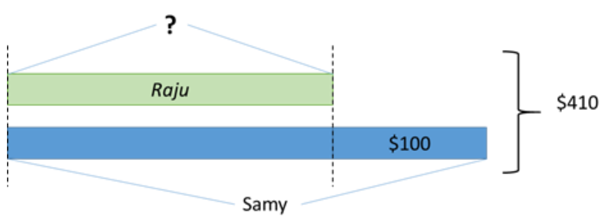


Figure 19 Modèle du problème de Raju et Samy.

On ne saurait trop souligner le rôle crucial de l'enseignant lors de ce travail à travers différentes représentations et interprétations . Il revient, en effet, à l'enseignant d'encourager les élèves à passer d'une forme à l'autre. De telles transitions entre les représentations doivent être faites dans des situations variées. Les recherches ont montré que les passages entre différentes représentations et la coordination d'au moins deux formes de représentation pour une même situation permettent de développer une compréhension mathématique profonde (Duval, 2006), ce qui favorise la pensée algébrique et facilite la résolution de problèmes en général.

Résolution de problèmes (Brizuela & Schliemann, 2004)

Les élèves sont confrontés au problème suivant:

> *Deux élèves ont la même quantité de bonbons. Briana a une boîte, deux tubes et sept bonbons en vrac. Susan a une boîte, un tube et 20 bonbons en vrac. Si chaque boîte contient la même quantité et que chaque tube contient la même quantité, pouvez-vous calculer la capacité de chaque tube? Qu'en est-il de chaque boîte? (Brizuela & Schliemann, 2004, p. 34)*

La situation elle-même est un problème de comparaison - assez familier et simple à résoudre. Les auteurs proposent, dans un premier temps, que la situation soit «jouée» avec des objets physiques. Dans de telles circonstances, l'élève pourrait utiliser des règles implicites de manipulation d'équations. Cependant, il est important que l'enseignant suggère des stratégies pour comparer les quantités impliquées : 1) trouver des « correspondances » entre les quantités identiques appartenant à deux personnes différentes; et 2) « annuler » (ou mettre de côté) des quantités identiques appartenant à deux personnes différentes. La verbalisation des stratégies permet aux élèves de conscientiser leurs actes implicites, et ainsi de mieux les comprendre. Dans cette approche, les élèves décomposent des ensembles et les regroupent afin de simplifier la situation jusqu'à ce que le problème soit résolu.

Cependant, il devrait y avoir une suite à cette activité sans aucun objet physique impliqué. À la place, les élèves devraient être encouragés à utiliser une représentation imagée / iconique de la situation, les élèves reliant explicitement des éléments identiques des deux côtés:

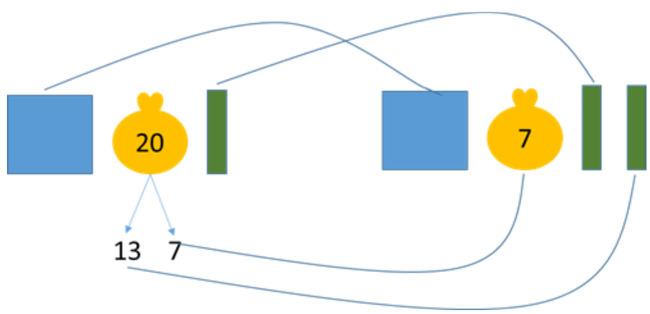


Figure 20 Les liens d'équivalences dans la situation avec des bonbons.

Il est entendu que cette étape prépare le traitement formel d'une équation.

Il appartient à l'enseignant de présenter le moyen de représenter la situation à l'aide de lettres. En spécifiant la signification des lettres utilisées, l'enseignant peut demander aux élèves comment formaliser (écrire mathématiquement) l'équivalence en question avec ce symbolisme. En s'appuyant sur la solution effectuée avec la représentation imagée, les élèves peuvent ensuite interpréter les stratégies de "correspondance" et "annulation" dans le contexte de cette équation formelle et parvenir à la résoudre. De cette manière, le traitement formel de l'équation trouve ses racines dans la manipulation physique et la représentation imagée. Les deux premières phases sont essentielles pour fonder le travail en vue de la solution symbolique.

Opérations avec des trous: (Carpenter et al, 2005)

À ce stade, les élèves travaillent beaucoup avec les quatre opérations arithmétiques et leurs propriétés, telles que la commutativité de la multiplication, la distributivité, les rôles de «0» et de «1» pour la multiplication, etc. Les tâches « opérations avec des trous » et « vrai or faux », que nous avons décrites ci-dessus, est un outil intéressant pour aider les élèves à comprendre ces lois fondamentales en mathématiques. Ces tâches peuvent être facilement modifiées pour permettre cet important développement de connaissances. Nous donnons ici quelques exemples.

Notez que ces exercices ne sont pas destinés à une pratique répétitive (feuilles de travail), mais que chaque expression doit être utilisée pour attirer la curiosité des élèves et organiser une discussion en classe.

$5 \times 2 - (5 \times \_\_) = 0$	$5 \div 2 - (\_\_ \div 2) = 0$
$5 \times 2 = (5 \times 5) - (5 \times \_\_)$	$10 \div 2 = (6 \div 2) + (4 \div \_\_)$
$(6 \times \_\_) = (2 \times 3) \times 4$	$24 \div \_\_ = (24 \div 3) \div 4$
$7 \times \_\_ = 7$	$7 \times \_\_ = 7$

Figure 21 Exemples de tâches

La distributivité de la multiplication sur l’addition ou la soustraction offre de nombreuses opportunités pour développer la pensée relationnelle. L'enseignant doit donner aux élèves une tâche qu'ils ne savent pas résoudre d’emblée, mais dans laquelle ils pourront tout de même progresser en utilisant des relations entre les expressions.

Par exemple, si on demande à un élève de calculer 4×9, mais qu'il connait par cœur le résultat uniquement pour 2×9, il peut considérer 4×9 comme 2×9 + 2×9, ou formellement 4×9 = (2 + 2) ×9. Cette pensée illustre une approche relationnelle plutôt que purement arithmétique procédurale.

Ce type d'activité constitue également le contexte dans lequel on peut travailler avec le sens des opérations (dans le cas ci-dessus, avec le sens de la multiplication). Par exemple, la tâche présentée à l'élève est la suivante: 52×11 = (52×10) + m. On pose la question suivante : Quel est la valeur de m pour en faire une phrase numérique vraie? (Carpenter et al., 2005). L'élève devrait être encouragé à chercher une solution en utilisant le sens de la multiplication.

Nous pouvons aussi modéliser les expressions numériques en utilisant des schémas ou demander à l’élève de composer un problème verbalement.

Ainsi, l’enseignant doit soutenir le raisonnement de l’élève en menant une discussion dans laquelle la référence aux propriétés et à la signification des opérations **est explicitée** par un formalisme mathématique. Généralement, les équations non standard utilisées dans cette catégorie de tâches doivent être configurées de manière à ce que la solution soit plus naturelle (plus simple, plus facile) par l'utilisation des propriétés des opérations que par des calculs.

Motifs (Nacarato et al., 2017)

La tâche «Former une file» propose aux élèves de former un motif en utilisant des élèves. Les élèves forment une file d'enfants organisée dans la salle. La régularité est représentée par des gestes des élèves et par leur positionnement corporel. Par exemple: main levée vers le haut/posée vers le bas; être debout/être à genoux, etc. Quelques élèves forment une file pour représenter le motif au moins deux fois. Un autre élève doit comprendre le motif et se positionner dans la file selon la régularité observée. Wijns (2019) suggère qu'on peut aussi encoder le motif en utilisant des lettres (exemple A B C A B C) ou proposer un code pour que l'équipe le forme en choisissant des gestes et des positions.

Les chercheurs insistent sur l'importance de permettre à tous les élèves de proposer des hypothèses, les discuter, les vérifier et les défendre. Le rôle de l'enseignant est d'assurer que finalement, tous les élèves sont capables de formuler (en utilisant langage mathématique) et de réutiliser la règle de chaque suite étudiée.

Articulation suites et fonction-machine (Moss et al.,2011, 2013)

Note : Le principe est d'effectuer des allers-retours entre les 3 tâches pour établir des connexions. Les productions des suites et des règles pour la machine par les élèves est aussi une étape importante pour la consolidation. Les règles sont exprimées en mots. On peut aussi proposer des histoires pour laquelle la suite sera un modèle.

<u>Tâche 1 : Établir un lien entre une construction et sa position dans une suite</u>

Exemple d'histoire : *L'ouvrier est en train de construire un mur de blocs de ciment. Il installe trois blocs par heure. Voici les « photos » prises après 1 heure, 2 heures et 3 heures.*

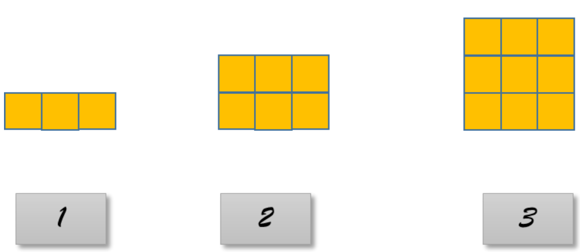


Figure 22 Suite de motifs.

Les photos forment une suite de motifs.

a) Si on continue de construire des motifs de la même manière, à quoi ressemblera le motif à la position suivante? Combien de blocs comportera ce motif?

b) À quoi ressemblerait le motif à la 10^{e} position? Combien de blocs comporterait ce motif?

c) Et qu'en serait-il du motif à la 100^{e} position?

d) Et pour **n'importe quelle position**? Quelle pourrait être **la règle**? (cette question est posée après avoir fait la tâche 2)

e) Mêmes questions avec cette suite :

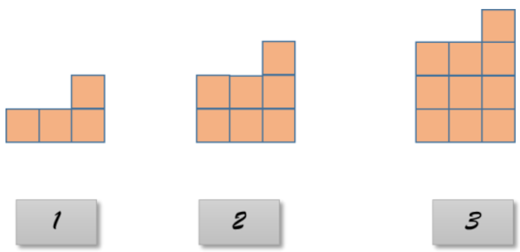


Figure 23 Une autre suite de motifs.

f) Construis une autre suite de motifs avec des blocs qui respecte une régularité. Demande à tes camarades de déterminer la règle de cette suite.

<u>Tâche 2 : « Devine quelle est la règle »</u>

Une « machine » transforme un nombre en un autre nombre selon une règle. Entre un nombre dans la fente « Entrée » et regarde le nombre qui ressort dans la fente « Sortie ». Devine quelle est la règle.

Tu peux créer une machine à ton tour pour faire jouer tes camarades : choisis une règle et quand un nombre est entré dans la machine tu dois renvoyer le nombre obtenu après transformation. Tes camarades doivent deviner la règle.

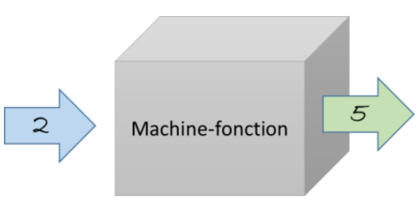


Figure 24 Machine-fonction : on lui donne un nombre et elle le transforme en un autre.

Nombre initial	**Nombre résultat**

10	**20**
6	**12**
8	**16**
Notre règle est	**Nombre pris 2 fois**[1]

Figure 25 Exemple de travail d'élèves pour découvrir la règle d'une machine.

Tâche 3 : Le trottoir de motifs

Une grande bande papier numérique est placée au sol. Les positions 1 à 10 sont indiquées.

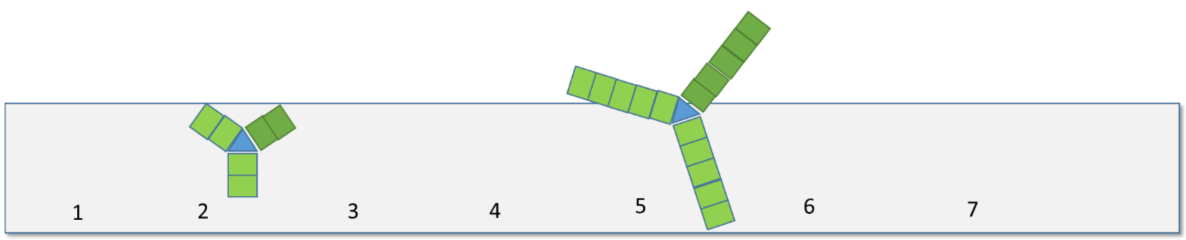


Figure 26 Bande de papier avec des figures formant une suite.

L'enseignant construit un motif à une position quelconque (la 5^{e} par exemple) puis il demande aux élèves d'émettre une hypothèse sur la règle de construction du motif selon sa position. Puis il construit un 2^{e} motif qui n'est pas consécutif. Il demande aux enfants de valider ou de changer leur règle si nécessaire. L'enseignant construit un dernier motif puis il prend les propositions des élèves pour la règle. Chaque enfant qui fait une proposition doit venir effectuer une construction pour l'expliquer.

[1] Cette expression est formulée par les élèves et correspond à « nombre multiplié par 2 ».

Cycle 3 (10-12 ans)

Au cycle 3, on continue le développement de la pensée algébrique dans des contextes de plus en plus complexes. Selon la recherche, les problèmes complexes contribuent davantage à l'approfondissement et à la maitrise des concepts mathématiques appris auparavant. Donc, l'exposition à la complexité est une étape cruciale et indispensable dans la construction d'une pensée mathématique chez les élèves. Nous présentons ici quelques activités qui favorisent la formation, chez les élèves, des composantes de la pensée algébrique pour qu'elles deviennent de véritables outils de pensée.

Concept d'équivalence quantitative (Papadopoulos, 2019)

Une série d'activités est proposée par Papadopoulos (2019). Il s'agit de présenter aux élèves des équivalences quantitatives exprimées par des images de mobiles. Évidemment, le mobile ne représente pas une image fidèle à la réalité physique, mais un modèle d'équivalence. Le travail avec ce modèle requière donc un niveau d'abstraction élevé. Chaque mobile est une combinaison de balances simples en état d'équilibre. Chaque objet (figure) représente un « poids » de façon que les figures identiques représentent des valeurs égales (une même valeur). Les nombres dans les cercles représentent des valeurs connues, et un cercle comportant un nombre en haut du mobile représente son poids total. Les combinaisons peuvent présenter des « équations » de degrés de complexité variés. Voici quelques exemples de problèmes posés à l'aide des mobiles.

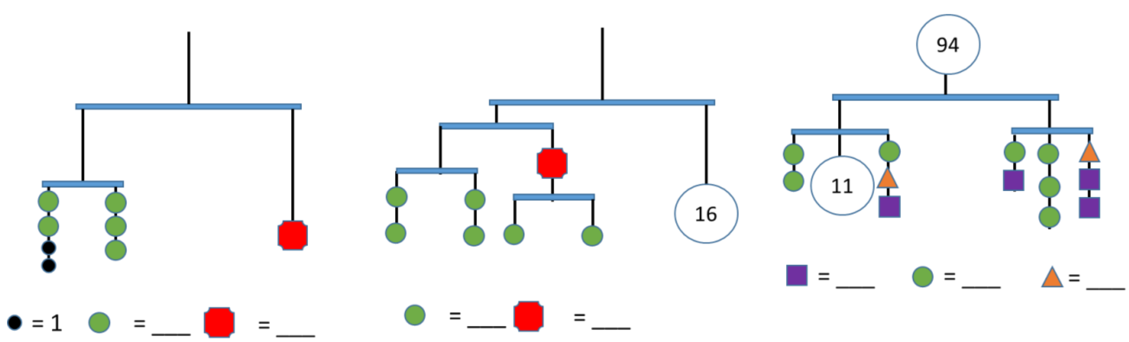


Figure 27 Exemples de mobiles : équations variées.

Les élèves sont invités à utiliser leurs connaissances des stratégies applicables à l'idée de balance pour graduellement simplifier la situation présentée et trouver les valeurs numériques des objets.

En réalité, chaque problème posé à l'aide de mobiles peut être exprimé comme un système d'équations et résolu par l'algèbre formelle. Toutefois, les problèmes de mobiles, ne sont pas des outils de **formalisation** des stratégies algébriques. Le but ultime de ces activités est d'approfondir la compréhension des élèves quant à l'idée de balance et d'équivalence quantitative, et faire cela à un niveau d'abstraction intermédiaire. Comme dans les autres activités mathématiques, l'enseignant peut inviter les élèves à verbaliser la situation ou composer un problème contextualisé qui lui correspondra. On demande aussi aux élèves d'expliquer leur stratégie de résolution et d'en démontrer sa validité.

Résolution de problème (Beckman, 2004)

L'utilisation de schémas par segments ou bandes, permet aux élèves de travailler avec des problèmes écrits très complexes sans toutefois appliquer les procédures algébriques formelles. Cette façon de travailler favorise grandement la compréhension des relations mathématiques et des lois associées avec les quatre opérations arithmétiques. Voici des exemples de problèmes et les représentations possibles.

> *Ron a donné 2/5 de son argent à sa femme et aussi dépensé la moitié de ce qui lui restait. Finalement, il lui reste 300$. Combien d'argent avait-il au début?*

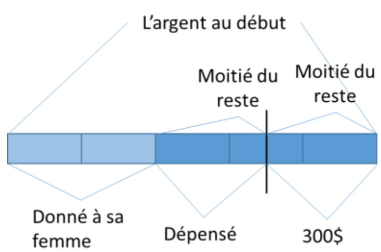


Figure 28 Modèle du problème de Ron.

Ce modèle de la situation peut être développé graduellement à partir des énoncés du texte du problème. Une fois construit, elle permet de proposer plusieurs stratégies de calcul pour trouver l'inconnue. Par exemple, on peut remarquer que le montant restant de 300$ représente 3 parties égales dont deux correspondent à 1/5 du montant de début. On peut donc trouver ce montant en effectuant $300 \div 3 \times 2 \times 5$. Alternativement, on peut d'abord reconstruire le montant avant la dépense 300×2, ce qui correspond aux 3/5 du montant de début. On peut donc procéder comme suite : $300 \times 2 \div 3 \times 5$.

Il est important de remarquer que toutes ces stratégies de calcul sont appuyées visuellement sur le modèle. Le modèle donc donne plus de sens aux propriétés des opérations arithmétiques. En plus, ces solutions peuvent être obtenues pour n'importe quelle valeur du montant restant et sont alors générales : $M \times 2 \div 3 \times 5$.

Voici un autre exemple de problèmes pour lequel une solution sans représentation visuelle parait très difficile.

Jacques avait 3 fois plus d'argent que Justin. Quand Jacques a dépensé 60$ et Justin a dépensé 10$, il est apparu qu'ils ont un même montant. Combien d'argent Jacques avait-il au début?

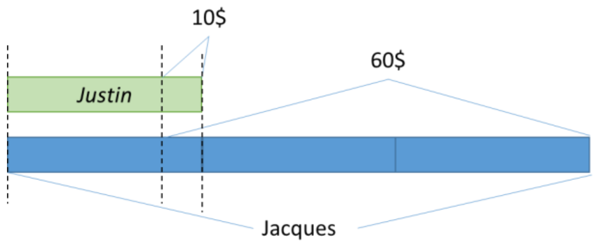


Figure 29 Modèle du problème de Jacques et Justin.

L'analyse visuelle du modèle du problème nous amène à constater que 10$ représente la différence entre 60$ que Jacques a dépensé et le montant compris dans 2/3 de son montant de début. Autrement dit, le montant de 60$ est composé de deux parties égales et de 10$. La représentation visuelle permet d'établir le calcul à poser pour retrouver le montant de Jacques : $(60 - 10) \div 2 \times 3$.

La chercheuse montre que cette pratique de résolution de problèmes écrit appuyée par les modèles de segments ou bandes, largement utilisée à Singapour au niveau primaire, permet une performance exceptionnelle des élèves singapouriens du niveau secondaire lors des épreuves internationales de TIMSS.

Traitement « fonctionnelle » d'un problème écrit : inspiré par (Boyce et Moss, 2019; Carraher et al. 2005)
Plusieurs problèmes écrits traditionnels peuvent être utilisés pour développer la pensée fonctionnelle des élèves. Nous présentons ici un exemple pour montrer la transformation du problème et clarifier les aspects didactiques de l'activité de résolution.

> Problème typique : *Peter essaie d'amasser l'argent pour se payer un voyage à Montréal. Au début, il avait déjà 20$ dans sa tirelire. Ses parents lui donnent 5$ chaque jour pour lui venir en aide, évidemment à condition qu'il les aide dans le jardin.* ***En combien de temps Peter amassera la somme de 85$ nécessaire pour le voyage?***
> Problème transformé : *Peter essaie d'amasser l'argent pour se payer un voyage à Montréal. Au début, il avait déjà 20$ dans sa tirelire. Ses parents lui donnent 5$ chaque jour pour lui venir en aide, évidemment en condition qu'il les aide dans le jardin.* ***En combien de jours Peter amassera la somme nécessaire pour le voyage?***

Le but de la transformation du problème et de trouver une formulation qui empêche l'élève de se lancer dans le calcul immédiatement. À la place, on demande aux élèves de décrire le processus d'accumulation d'argent, de le représenter par un graphique dans un plan cartésien et d'établir une correspondance entre le nombre de jours et la somme accumulée.

La situation, qui est devenue dynamique, peut être décrite de deux façons distinctes :

- Chaque jour on ajoute 5$: **façon récursive**.
- À n'importe quel jour, la somme est composée de 20$ plus 5$ pris autant de fois que le nombre de jours : **façon fonctionnelle**.

Pour illustrer ces deux modes de pensée, on peut aussi représenter la situation sous forme de tableau de valeurs. Il faut attirer l'attention des élèves sur le fait qu'on doit bien représenter l'état de la tirelire avant le début du décompte des jours.

Nombre de jours	La somme
0	20
1	25
2	30
3	35
n	?

Figure 30 Tableau de valeurs consécutives.

Si on se promène dans la colonne de droite seulement (+5, +5, …), il nous faut beaucoup de « pas » pour arriver à une la somme désirée. Par contre, ce raisonnement nous montre ce qui change d'un jour à l'autre. Pour mieux répondre à la question du problème (même si on ne connait pas la somme désirée), il nous fout trouver une dépendance directe entre la somme et le nombre de jours. On cherche donc une formule (procédure générale de calcul) pour calculer le nombre de jours (J) à partir de la somme (S) ou vice versa : $J = (S - 20) \div 5 \; ou \; S = 5 \times J + 20$.

Cette activité invite l'élève à utiliser plusieurs modes de représentation ou manière de modéliser, à établir une correspondance entre ces modèles, à penser en terme d'un nombre « quelconque » et en terme de changement ou de processus, à développer à la fois sa pensée récursive et sa pensée fonctionnelle.

Pour la même histoire, la question du problème peut être posée différemment. *Si les parents de Pierre veulent que son rêve se réalise en un certain nombre de jours (par exemple 31), quelle somme doivent-ils lui offrir par jour pour amasser une somme particulière).* Dans ce cas-ci, on doit établir une relation fonctionnelle entre la somme désirée (S) et le montant par jour (M). $S = M \times 31 + 20$ ou $M = (S - 20) \div 31$.

Suites figuratives et pensée fonctionnelle: (Rivera et Becker, 2011; Blanton et al., 2015; Cooper et Warren, 2008; Wilkie, 2019)

Les suites figuratives sont reconnues par la recherche comme un outil didactique indispensable dans le développement de la pensée algébrique et surtout fonctionnelle chez les élèves. La littérature propose de nombreux exemples de suites et de manières de les exploiter en classe. Toutefois, les chercheurs suggèrent que certains éléments didactiques sont à respecter pour vraiment aider tous les élèves à développer ce type de pensée.

- Pour favoriser la pensée fonctionnelle (plutôt que récursive), il est mieux de présenter les suites avec des figures manquantes, plutôt que les premières figures les unes après les autres.
- Avant de demander les élèves de produire ou de décrire la relation fonctionnelle sous-jacente, il faut discuter avec eux sur la façon de varier, de « voir » les figures, leur décomposition en éléments plus simples qui, eux aussi peuvent être en relation avec la position de la figure dans la suite.
- Chaque « vision » des figures peut engendrer un raisonnement différent et une formulation différente de la relation recherchée. Il est très intéressant de comparer les différentes « visions » et formules obtenues par les élèves.

Voici un exemple de suite figurative incomplète (Wilkie et Clarke, 2016).

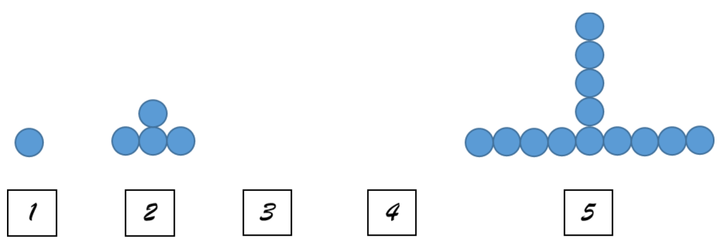


Figure 31 Suite figurative croissante.

Et voici les façons variées utilisées par des élèves pour comprendre et décrire la construction d'une figure.

Description verbale	**Vision**	**Formulation mathématique**

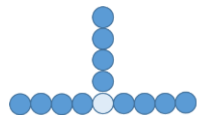
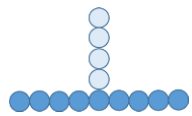
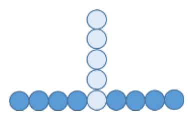
On ajoute 3 cercles à chaque prochaine figure.		$1\ + 3 + 3 + 3 \ldots$
Le centre avec 3 rayons d'une même longueur.		$1\ +\ 3(n-1)$ n – la position de la figure dans la suite
Une ligne horizontale et une ligne verticale.		$2n-1+(n-1)$
Une ligne verticale et deux lignes horizontales.		$n +\ 2(n-1)$

Figure 32 Différentes façons de voir une figure de la suite.

Pour analyser la relation entre la position de la figure et le nombre de cercles qui la composent, on doit utiliser des représentations et notations variées incluant la manipulation avec le matériel physique (jetons, figures géométriques, etc.). Par exemple, on peut mettre les données sur les figures connues dans un tableau, dans un plan cartésien ou exprimer leur relation sous forme de formule. Dans tous les cas, c'est la responsabilité de l'enseignant de s'assurer que chaque élève comprend les notations et les représentations utilisées, et qu'il peut assurément passer d'une représentation à une autre sans perdre le sens.

Dans l'exemple qui suit, la situation proposée n'est pas sous forme de suite croissante. Toutefois, les élèves ont été capables de reconnaitre la structure et d'arranger les figures en ordre croissant (Wilkie et Clarke, 2016).

Voici une collection de camions construits de façon particulière à l'aide de carrés rouges et verts.

- *Quelle est cette façon spéciale? Décrivez-la.*

- *Si quelqu'un vous donne un nombre de carrés rouges, de combien de carrés verts aurez-vous besoin pour construire un camion de la même collection? Comment allez-vous procéder pour trouver ce nombre de carrés verts?*
- *Pouvez-vous décrire la règle de calcul en utilisant la lettre R pour le nombre de carrés rouges et la lettre V pour le nombre de carrés verts?*

Des suites croissantes peuvent être composées à partir des situations de tous les jours. Par exemple Rivera et Becker (2011) proposent de mesurer une pile de chaises posées l'une sur l'autre.

Figure 33 Une situation ordinaire donnant lieu à une pensée fonctionnelle.

La hauteur de la pile de chaises est composée de la hauteur de la première chaise et des hauteurs ajoutées, cette hauteur étant la même pour chaque chaise. Les chercheurs suggèrent de ne pas arrêter le travail sur cette tâche au moment où une formule de calcul est construite. Par exemple, les élèves ont trouvé que pour calculer la hauteur de la pile en centimètres il faut suivre la procédure suivante :

$$(nombre\ de\ chaises - 1) \times 7 + 80$$

Alors, l'enseignent peut proposer aux élèves de réfléchir sur ce qu'ils peuvent dire sur une pile de chaises constituée par des chaises d'un autre type et pour laquelle la formule est :

$$(nombre\ de\ chaises - 1) \times 11 + 54$$

Dans cette nouvelle situation, quelle est la hauteur de chaque chaise? Qu'est-ce qui se passe si on ajoute ou enlève une chaise?

Complexité et flexibilité de la pensée: (Heuvel-Panhuizen et al., 2013)

Pour que la pensée algébrique devienne un véritable outil de résolution de problème pour l'élève, il faut mettre l'élève dans une situation où il doit utiliser simultanément plusieurs structures et différents modes de pensée. Voici une telle situation proposée par Heuvel-Panhuizen et ses collègues (2013).

Il y a 75 pages dans un livre. Petra commence la lecture lundi. Mardi, elle lit 5 pages de plus que lundi. Mercredi, elle lit 5 pages de plus que mardi et elle termine le livre. Combien de pages Petra a-t-elle lu mercredi?

D'abord pour comprendre ce problème, il faut imaginer le processus d'augmentation du nombre de pages lues à chaque jour. Ceci représente une **pensée fonctionnelle ou récursif**. Par la suite, on peut **modéliser** (Figure 34) la situation en la représentant par des barres. Le modèle permettra de saisir **la relation entre tous les éléments** puis de trouver une stratégie de calcul. Tous ces trois modes de pensée—fonctionnelle/récursif, relationnelle et modélisation—sont nécessaires pour décortiquer la situation et la résoudre. Ce processus de résolution sera difficilement accessible aux élèves s'ils rencontrent ce défi pour la première fois, sans aucune formation en pensée algébrique.

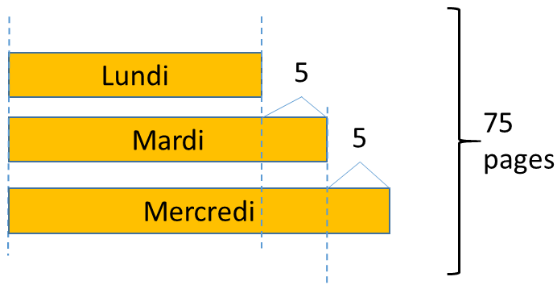


Figure 34 Modèle du problème de lecture.

Par contre, la combinaison de défis favorisera la maitrise des chacun de ces modes de pensée et permettra la création de liens entre eux.

Conclusion

En guise de conclusion, voici les recommandations générales pour améliorer l'enseignement des mathématiques au primaire et à la maternelle en vue de favoriser le développement de la pensée algébrique chez les jeunes.

1. Mettre en place une formation spécifique pour les futurs enseignants et les enseignants en poste.

Plusieurs chercheurs (ex. Malara et Navarra, 2018) constatent que les enseignants ne possèdent pas les compétences et habiletés nécessaires à la mise en œuvre de pratiques efficaces pour le développement de la pensée algébrique dès la maternelle. En effet, ils ne sont pas initiés à de telles approches ni en tant qu'élève, ni dans leur formation initiale à l'enseignement puisqu'il s'agit de connaissances scientifiques récentes. Par ailleurs, les connaissances en algèbre formelle acquises au secondaire et au collégial sont insuffisantes puisqu'elles ne correspondent pas aux contenus de ces nouvelles pratiques qui s'appuient en fait sur les principes implicites à la source de ces connaissances.

2. Prioriser l'enseignement d'un regard relationnel sur l'arithmétique.

Traditionnellement, les objets arithmétiques sont traités comme des processus. Par exemple, 2 + 3 = 5 est lu de gauche à droite et interprété comme « ajouter 3 à 2 donne 5 ». Cette vision opérationnelle attire l'attention sur le résultat obtenu, soit 5. En contrepartie, adopter un regard relationnel implique de prendre en considération l'ensemble de l'équation : 2 + 3 = 5 exprime la relation d'équivalence entre deux expressions arithmétiques (2+3 et 5), 2 + 3 et 5 représentent donc la même quantité. Cette vision relationnelle attire l'attention sur la relation d'équivalence entre 2 + 3 et 5.

Le regard relationnel permet de mettre en évidence les lois ou propriétés fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre (exemple : la commutativité de l'addition, a+b=b+a). L'étude de ces lois contribue positivement à la construction de connaissances arithmétiques aussi bien qu'algébriques. Certains auteurs proposent d'aborder l'étude de ces lois par la généralisation de l'expérience arithmétique (numérique) de l'élève. Cette approche est celle de « l'algèbre comme arithmétique généralisée ». Par exemple, l'élève peut remarquer que 2+3=3+2, que 5+7=7+5, que 12+9=9+12, etc. et ainsi induire que c'est probablement vrai pour tous les nombres.

D'autres proposent d'introduire d'abord ces lois aux élèves dans le contexte de comparaison qualitative de grandeur physique (longueur, volume, poids…). Ensuite, ces lois sont exploitées dans les contextes arithmétiques (numériques) et algébriques. Cette dernière approche peut être identifiée comme «algèbre à la base de l'arithmétique ». Par exemple, la commutativité observée sur deux longueurs juxtaposées (bandes de papier) et généralisée dès le début à l'aide du langage mathématique (A+B=B+A) se transfère facilement sur les cas d'addition de nombres naturels ou de termes algébriques.

Donc 5+6=6+5 et 2x+3y=3y+2x.

3. Introduire les lettres comme représentant des quantités dès le début de l'apprentissage.

La notation littérale est très utile pour exprimer et communiquer les relations et les lois fondamentales dans une forme générale, concentrée, et facilement observable. Il a été démontré que l'utilisation des lettres dans la communication mathématique n'est pas un obstacle et les élèves dès 5-6 ans peuvent en profiter pour apprendre à généraliser et développer des idées mathématiques de plus en plus abstraites et complexes. Les auteurs (ex. Davydov, 2008; Lee, 2006; Hewitt, 2012) expliquent que l'utilisation des lettres en mathématique est un outil développé au sein de la culture mathématique et les enfants peuvent l'apprendre, comme tous les autres outils culturels, par l'immersion. L'élève doit donc être exposé à l'utilisation et aux contraintes de l'outil que sont les lettres en mathématiques et être invité à l'employer dans ses réflexions et ses communications mathématiques.

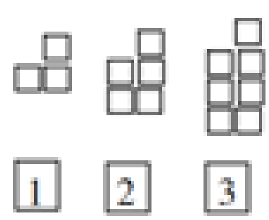
Notons que l'usage de la lettre en mathématique est varié. La lettre peut désigner une quantité constante, connue ou inconnue, une quantité variable ou un nombre général.

4. Promouvoir l'étude des cas complexes.

Plusieurs chercheurs (ex. Heuvel-Panhauzen et al. 2013; Smith et Thompson, 2008) proposent que seule la résolution de problèmes présentant des relations quantitatives complexes assure le développement du raisonnement mathématique profond et flexible. Un problème complexe (présentant plusieurs relations entre des données) demande une analyse plus sophistiquée et une planification plus élaborée qu'un problème simple (présentant une seule relation). Face à un problème complexe, les élèves développent à la fois la flexibilité à choisir et utiliser les outils de pensée acquis, et de nouveaux outils cognitifs et métacognitifs. De plus, c'est dans ce contexte que les lois fondamentales des mathématiques, le regard relationnel ainsi que les stratégies de raisonnement variées prennent un sens et deviennent des outils essentiels pour l'élève.

5. Exposer les élèves à des situations dans lesquelles des quantités co-varient.

Pour préparer les élèves à l'étude des fonctions au secondaire, plusieurs auteurs proposent l'utilisation de tâches dans lesquelles l'élève doit analyser la dépendance entre deux quantités qui peuvent prendre plusieurs valeurs. Exemple : l'étude d'une suite de figures croissante dans laquelle le nombre d'éléments de chaque figure dépend de la position de la figure dans la suite et vice et versa.



D'autres auteurs proposent de simplement ajouter une réflexion sur la covariation à partir de problèmes écrits traditionnels. Par exemple, à partir du problème suivant : *Anna a 5 crayons et Marta a 3 crayons de plus qu'Anna. Combien de crayons Marta a-t-elle?*, il est possible d'amener les élèves à réfléchir sur la covariation des nombres de crayons d'Anna et de Marta. On peut, par exemple, poser les questions suivantes: *Si Anna a 2 crayons, que peut-t-on dire sur le nombre de crayons de Marta? Et si Anna a 10 crayons? Et si Anna a x crayons, comment peut-on exprimer le nombre de crayons de Marta?* Les auteurs soulignent que la compréhension de la notion de « variable », nécessaire au secondaire, se développe à travers des situations dans lesquelles on s'intéresse à des quantités qui varient. Ainsi, ainsi il est important d'initier les élèves à ce type de situations dès le primaire.

6. Travailler davantage et de façon plus explicite la composante modélisation de la compétence à résoudre des problèmes.

La modélisation est reconnue par les chercheurs comme un outil de raisonnement et de généralisation mathématique. Ils (ex. Corral, 2019; Davydov, 2008; Mason, 2018) soulignent que, de point de vue de l'apprentissage, l'utilisation des représentations est efficace si la représentation joue le rôle de modèle de l'objet ou de la situation étudiée. Par exemple, si les élèves analysent une suite répétitive formée de blocs géométriques (carré, cercle, cercle, carré, cercle, cercle…) l'enseignant peut proposer de modéliser la suite comme ABBABBABB et ensuite demander aux élèves de construire d'autres exemples qui correspondent à ce modèle (rouge, vert, vert, rouge, vert, vert ou grand, petit, petit, grand, petit, petit). Habituellement, ce qui est représenté par le modèle est l'ensemble de relations essentielles qui détermine le sens mathématique de l'objet ou de la situation. La pratique de la modélisation favorise alors la généralisation et l'acquisition des relations mathématiques et des lois fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre.

7. Favoriser l'apprentissage de représentations permettant la modélisation et ainsi la généralisation.

Les représentations, telles que droite numérique, plan cartésien, tableaux, schématisation Range-Tout, l'utilisation des lettres et symbolisme mathématique, etc., sont des outils de raisonnement et de modélisation mathématique. Les chercheurs constatent qu'une simple utilisation de représentations variées dans l'apprentissage des mathématiques n'est pas suffisante. En effet, pour assurer l'accès de tous les élèves à la généralisation et au développement des idées de plus en plus abstraites, l'usage et la compréhension de **certaines représentations** sont essentielles. Toutefois, chaque outil de représentations doit être utilisé en cohérence avec le but de l'apprentissage. Par exemple, une représentation par dizaines et unités facilite le calcul et l'apprentissage du système de numération. Par contre dans le cas de résolution d'un problème écrit, on cherche premièrement l'opération ou les opérations à effectuer. Donc dans ce cas, pour analyser les relations entre les données une représentation Range-Tout est plus pertinente. Les systèmes de représentations spécifiques doivent être introduits aux moments où le contenu d'apprentissage l'exige et que les élèves en ressentent le besoin pour faciliter leur communication mathématique. De plus, les chercheurs soulignent l'importance de varier les outils de représentations ainsi que les modes de pensée mathématique pour outiller les élèves avec **un ensemble de stratégies** plutôt que de favoriser une stratégie particulière. Par conséquent, il ne faut pas limiter la résolution de problèmes à l'utilisation de stratégies algébriques. Les stratégies arithmétiques ou autres sont parfois plus efficaces.

8. Favoriser la discussion mathématique en classe.

Tous les chercheurs insistent sur l'adoption d'une culture de discussion mathématique en classe. Cette culture inclut, entre autres, l'utilisation d'un langage mathématique adéquat, la valorisation du raisonnement de chaque élève (même si ce raisonnement n'est pas clair, n'est pas complet ou n'est pas correct). Chaque élève est invité à proposer sa vision de la situation, formuler une hypothèse, partager sa stratégie. Chaque opinion doit être discutée, justifiée et clarifiée pour tous les élèves. Le temps utilisé pour les discussions mathématiques n'est pas perdu, mais investi dans le développement des élèves comme penseurs mathématiques. Au sein de cette culture, l'erreur mathématique est un levier d'apprentissage plutôt qu'un problème ou un obstacle. Dans plusieurs expérimentations, les élèves ont été invités à analyser des erreurs commises par un personnage inventé, des situations mathématiquement impossibles ou des communications mathématiques incorrectes. Tous ces outils didactiques favorisent le développement du raisonnement mathématique des élèves et contribuent positivement à leur développement personnel et social.

9. Varier l'enseignement selon la nature du contenu enseigné.

Dans les expérimentations rapportées et consultées, les méthodes d'enseignement varient selon les buts de l'activité et les différents contenus abordés. Par exemple, lors des activités d'étude de suites de motifs, les élèves ont eu besoin d'une explication sur « comment analyser les motifs et à quoi porter attention pour dégager le modèle » (enseignement explicite). En utilisant cette nouvelle connaissance, les élèves ont analysé plusieurs suites pour en découvrir les règles récursives et fonctionnelles de façon presque autonome (enseignement par problématisation). Par contre, les élèves ont été constamment invités à respecter la culture mathématique en justifiant leurs idées et en discutant les stratégies proposées par leurs pairs (enseignement par immersion).

Ces recommandations sont le fruit de notre synthèse de connaissances tirées des travaux de chercheurs du monde entier. Ces connaissances confirment que la pensée algébrique est à la portée des jeunes élèves et que l'enjeu se situe plutôt au niveau du choix du matériel didactique et des stratégies d'enseignement. Toutefois, il faut être conscient que beaucoup de travail doit être fait pour construire un programme d'enseignement adapté aux besoins des élèves qui assurera véritablement la diminution de la rupture arithmétique-algèbre.

References

Baroody, A. J., & Lai, M. (2007). Preschoolers' Understanding of the Addition–Subtraction Inverse Principle: A Taiwanese Sample. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(2), 131–171. https://doi.org/10.1080/10986060709336813

Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams : a Method Demonstrated in Grade 4 – 6 Texts Used in Singapore. *Mathematics Educator*, *14*(1), 42–46.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving: Continuities and discontinuities. In *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American chapter PME-NA* (Vol. 2, pp. 19–25). Asilomar, California.

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E. J., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebrai thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87.

Blanton, M. L., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(3), 167–201. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474534

Boyce, S., & Moss, D. (2019). A Re-emergent Analysis of Early Algebraic Learning. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 409.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-Year-Old Students Solving Linear Equations. *For the Learning of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education*, *24*(2), 33–40.

Cai, J., & Knuth, E. J. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. (G. Kaiser & B. Sriraman, Eds.). New York: Springer.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2005). Algebra in Elementary School : Developing Relational Thinking 1. *ZDM - Mathematics Education*, *37*(1), 53–59.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2005). Chapter 1 : Treating the Operations of Arithmetic as Functions Linked references are available on JSTOR for this article : 0 NATIONAL COUNCIL OF Chapter 1 : Treating the Operations of Arithmetic as Functions, *13*(2005).

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students ' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 23–37. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8

Davydov, V. V. (1982). Psychological Characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: cognitive perspective* (pp. 224–238). Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Heuvel-Panhuizen, M. Van Den, Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students ' strategies in early algebra problem solving supported by an online game, 281–307. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9483-5

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates. Retrieved from http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:The+Early+Learning+of+Algebra:A+Structural+Perspective#0

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lai, M., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, *23*(1), 216–235. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.06.002

Lee, J.-E. (2006). Teaching algebraic expressions to young students : The three-day journey of " a + 2 ." *School Science and Mathematics*, *106*(2), 98–104.

Mason, J. (2018). How Early Is Too Early for Thinking Algebraically? In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 329–350). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Molina, M., & Mason, J. (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(4), 224–242. https://doi.org/10.1080/14926150903191885

Moss, J., & London-McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and co-variation. In *Early Algebraization, Advances in mathematics education* (pp. 277–301). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Nacarato, A. M., Dias, D., Cristiane, C., & Santos, S. (2017). Le rôle de l'interaction verbale pour l'acquisition de la pensée algébrique dans l'enseignement primaire. *Nouveaux Cahiers de La Recherche En Éducation*, *20*(3), 56–78.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*(September 2017), 210–227. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.07.001

Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2018). When the "Tug-of-War" Game Facilitates the Development of Algebraic Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9928-5

Pasnak, R., Kidd, J. K., Gadzichowski, M. K., Gallington, D. A., Saracina, R. P., & Addison, K. T. (2009). Promoting early abstraction to promote early literacy and numeracy. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *30*(3), 239–249. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2008.12.006

Polotskaia, E., & Savard, A. (2018). Using the Relational Paradigm: effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education*, *20*(1), 70–90. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1442740

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. In *Early Algebraization, Advances in mathematics education* (pp. 323–366). https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Smith III, J. P. (Jack), & Thompson, P. W. (2008). Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). New York London: Lawrence Erlbaum Associates.

Wallace, A.H; White, M.J., Stone, R. (2010). Sand and Water Table. Early Childhood Corner. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Warren, E., & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 76–95. https://doi.org/10.1007/BF03217546

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. In K. M. Robinson, H. P. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wilkie, K. J. (2019). Investigating Students' Attention to Covariation Features of their Constructed Graphs in a Figural Pattern Generalisation Context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 47–49. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09955-6

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 223–243. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0146-y