Chapitre 1.5 Les situations et les relations relations multiplicatives

> Dans ce chapitre, nous allons aborder la correspondance entre les types de problèmes identifiés dans le programme (???) tels que : addition répétée, soustraction répétée, partage, contenance, comparaison, produit cartésien, aire, volume et disposition rectangulaire. Nous allons proposer leur analyse possible du point de vue des relations multiplicatives.

Dans des années 80, des chercheurs en didactique des mathématiques ont classifié les problèmes de multiplication et de division. Depuis, les programmes scolaires utilisent ces classifications pour orienter l'enseignement. On parle souvent de problèmes « d'addition répétée » ou « de partage », « de contenance » ou « de disposition rectangulaire ». Pour mieux orienter nos lecteurs et lectrices dans ce chapitre, nous allons analyser des exemples de ces types de problèmes pour expliquer comment on peut analyser, représenter et résoudre ces problèmes en nous appuyant sur la pensée relationnelle et la modélisation à l'aide de schémas.

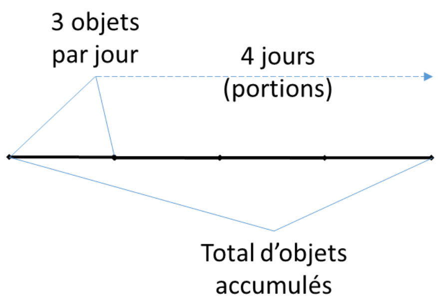
Généralement, le nom donné à un type de problème reflète directement l'action ou un aspect visuel ou physique de la situation. Par exemple, dans les problèmes « de partage », on partage quelque chose de façon égale; dans les problèmes « de disposition rectangulaire », le contexte favorise l'organisation des objets de cette façon, etc. L'analyse relationnelle quant à elle cherche à établir des relations entre les quantités mentionnées dans le problème et identifier le rôle de chaque quantité dans ces relations. L'analyse relationnelle utilise évidemment les aspects « immédiatement visibles » de la situation, tels que la mention de partage ou de disposition rectangulaire, pour passer à une représentation graphique des relations et ensuite à une solution.

Addition répétée

Problème typique : Gustave reçoit 3 objets par jour. Combien d'objets reçoit-il en 4 jours?

Analyse : On imagine tous les objets accumulés en ligne. On doit voir 4 portions (jours) de 3 objets. Le total d'objets peut jouer le rôle de la quantité qu'on veut mesurer, un groupe (une portion) de 3 objets va jouer le rôle de l'étalon, et le nombre 4 sera le nombre de répétitions (résultat de la mesure). Nous reconnaissons ici la **relation de composition multiplicative**. Autrement dit, le total (de 12 objets) est **composé** de 4 étalons (groupes de 3 objets).

Représentation de la relation :



Construction de la phrase de calcul : Pour reconstruire le total d’objets reçus, on doit compter 4 fois une portion de 3 objets. L’élève peut dire par exemple : « Je dois prendre 4 fois le même groupe de 3 objets. Il s’agit donc d’une multiplication. » L’opération sera 4×3=.

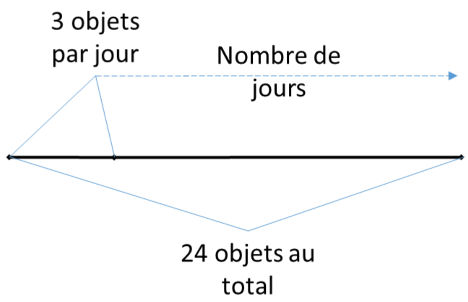
> Dans nos expérimentations, nous avons beaucoup insisté sur le fait que les deux façons d’écrire 4×3 ou 3×4 sont corrects si seulement les élèves identifient correctement les rôles des nombres 3 et 4. Par exemple, l’élève peut dire : « je prends 4 fois les 3 objets » ou « je dois prendre les 3 objets 4 fois ». Dans les deux cas, le nombre d’objets dans un groupe joue le rôle d’étalon et le nombre de jours joue le rôle du nombre de répétitions (coefficient). La commutativité de la multiplication comme opération arithmétique (4×3 = 3×4) est une autre question. On doit le discuter à moment donné avec les élèves. Par contre au début d’apprentissage, la compréhension des rôles des données dans une situation est primordiale.

Contenance

Problème typique : Gustave reçoit 3 objets par jour. Combien de jours lui faut-il pour accumuler 24 objets?

Analyse : On imagine les 24 objets accumulés en ligne et on les sépare mentalement en portions (groupes) de 3 objets. 24 objets est donc la quantité totale (mesurée), 3 objets est l’étalon, et on cherche le nombre de répétitions. Nous reconnaissons encore ici la **relation de composition multiplicative**. Notre totale d’objet est **composé** de groupes égaux.

Représentation de la relation :



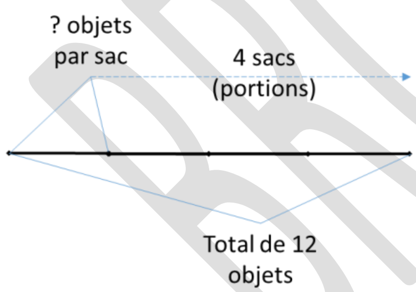
Construction de la phrase de calcul : Pour trouver le nombre de jours, on doit mentalement couper la ligne d'objets en parties égales, 3 objets dans chacune. L'élève peut dire par exemple : « J'ai 24 objets que je partage en les plaçant en groupe de 3. Cette opération, couper en parties égales, partager en groupes égaux, c'est une division. » Donc, l'opération est 24÷3=.

Partage

Problème typique : Gustave place un même nombre d'objets dans chacun de ses 4 sacs. Au total, il a placé 12 objets. Combien d'objets y a-t-il dans chaque sac?

Analyse : On imagine les 12 objets rangés en ligne et les sépare mentalement en 4 parties égales (4 sacs). La quantité totale mesurée est donc l'ensemble de 12 objets, 4 est le nombre de répétitions et l'étalon est le nombre d'objets dans chaque partie (sac). Nous reconnaissons encore ici la **relation de composition multiplicative**.

Représentation de la relation :



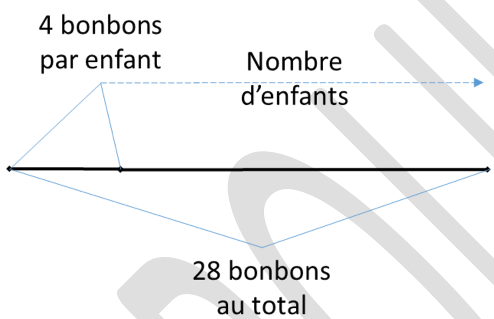
Construction de la phrase de calcul : Pour trouver le nombre d'objets dans chaque sac, on doit mentalement couper la ligne d'objets en 4 parties égales. Chacune des parties représentera les objets dans un sac. L'élève peut dire par exemple : « J'ai 12 objets que je partage de façon égale entre 4 sacs. Cette opération, couper en parties égales, partager en groupes égaux, c'est une division. » Donc, l'opération est 12÷4=.

Soustraction répétée

Problème typique : Madame Alice veut donner des bonbons aux enfants. Elle donne 4 bonbons à chaque enfant. Elle avait 28 bonbons et les a tous donnés. Combien d'enfants ont reçu de bonbons?

Analyse : On imagine les 28 bonbons de madame Alice en ligne et les sépare mentalement en portions de 4 bonbons. D'une part, ce processus ressemble à un processus de mesure : on identifie une portion de 4 bonbons et on le « donne ». On peut donc « compter » les portions. Ainsi, on peut mesurer l'ensemble de bonbons en termes de portions (4 bonbons – une unité de mesure). D'autre part une fois le processus réalisé, on arrive à une situation similaire à celles décrites plus haut : l'ensemble de bonbons est composé de groupes égaux de 4 bonbons. Ainsi, le nombre de répétitions correspond au nombre d'enfants, la quantité totale (mesurée) est de 28 bonbons et 4 bonbons est l'étalon. On cherche alors le nombre de répétitions. Nous avons reconnu la **relation de composition multiplicative**.

Représentation de la relation :



Construction de la phrase de calcul : Pour trouver le nombre d'enfants, on doit mentalement couper la ligne de bonbons en parties égales, 4 bonbons dans chacune. L'élève peut dire par exemple : « J'ai 28 objets que je partage en les plaçant en groupe de 4. Cette opération, couper en parties égales, partager en groupes égaux, c'est une division. » Donc, l'opération est 28÷4=.

Comparaison (consistant)

Les problèmes de comparaison multiplicative présentent habituellement plus de défi aux élèves et ils sont moins fréquents dans des manuels scolaires et cahiers d'exercices. Pourtant, si on les approche par mots-clés et opérations, ce défi augmente dans les cas où l'expression de comparaison ne correspond pas à l'opération à effectuer. Pour mieux identifier ces cas de défi pour l'élève, on distingue les problèmes consistants (mots-clés correspond directement à l'opération) et les problèmes inconsistants (mots-clés est opposé à l'opération).

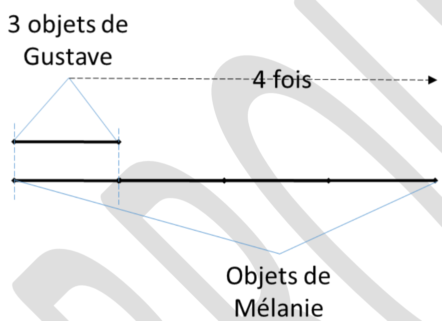
> **Problème consistant** : Gustave a 3 objets. Mélanie en a 4 **fois plus**. Combien d’objets Mélanie a-t-elle? (Solution **4×3**)
>
> **Problème inconsistant** : Gustave a 3 objets. C’est 4 **fois moins** que Mélanie. Combien d’objets Mélanie a-t-elle? (Solution **4×3**)

Nous avons discuté ce genre de défi dans notre premier livre, quand nous avons parlé de limitations des stratégies de résolution qui s’appuient principalement sur les mots-clés. Grâce à l’approche par relation, les élèves vont surmonter ce défi sans trop de peine.

Problème typique : Gustave a 3 objets. Mélanie en a 4 fois plus. Combien d’objets Mélanie a-t-elle?

Analyse : Gustave et Mélanie ont chacun leurs propres objets. On imagine les objets de Mélanie en ligne et les objets de Gustave en une autre ligne. Si on compare les deux lignes, la ligne de Mélanie doit être plus longue, elle contient 4 portions équivalentes à la ligne de Gustave. Nous devons donc considérer les objets de Mélanie comme la quantité comparée plus grande (quantité mesurée) et les objets de Gustave comme la quantité comparée plus petite (étalon). La quantité de Mélanie mesure 4 fois la quantité de Gustave. Nous avons reconnu la **relation de comparaison multiplicative**.

Représentation de la relation :



Construction de la phrase de calcul : Pour reconstruire le total d’objets de Mélanie, on doit compter 4 fois une portion de 3 objets équivalente aux objets de Gustave. L’élève peut dire par exemple : « Si Mélanie a 4 fois plus que Gustave, je dois prendre la quantité comme celle de Gustave 4 fois. Ceci est une multiplication. » L’opération sera 4×3=.

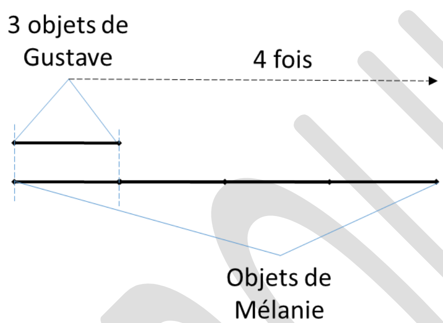
Comparaison (inconsistant)

Problème typique : Gustave a 3 objets. C’est 4 fois moins que Mélanie. Combien d’objets Mélanie a-t-elle?

Analyse : Gustave et Mélanie ont chacun leurs propres objets. On imagine les objets de Mélanie en ligne et les objets de Gustave en une autre ligne. Si on compare les deux lignes, la ligne de Gustave est plus courte que la ligne de Mélanie, car Gustave a moins d’objets. On peut donc dire que Mélanie a 4 fois plus d’objets que Gustave. Nous pouvons considérer les objets de Mélanie comme la quantité comparée plus grande (quantité mesurée) et les objets de Gustave comme la quantité comparée plus petite (étalon). La quantité de Mélanie mesure 4 fois la quantité de Gustave. Nous avons reconnu la **relation de comparaison multiplicative**.

> Dans nos expérimentations, nous avons remarqué que c'est particulièrement dans ce genre de situations (comparaison inconsistante) qu'une occasion se présente pour l'élève de développer la flexibilité de sa pensée relationnelle. Pour analyser et résoudre ce genre de problèmes, les élèves doivent changer leur point de vue : si Gustave a 4 fois moins que Mélanie, alors Mélanie a 4 fois plus que Gustave. D'autres reformulations sont aussi aidantes : si on partage la quantité de Mélanie, on obtient une équivalente à celle de Gustave; si on prend la quantité de Gustave 4 fois, on obtient celle de Mélanie; si on mesure la quantité de Mélanie à l'aide de quantité de Gustave, on obtient 4 (fois). Plus tard on dira que la quantité de Gustave est équivalente à un quart de celle de Mélanie, etc.

Représentation de la relation :



Construction de la phrase de calcul : **Construction de la phrase de calcul** : Pour reconstruire le total d'objets de Mélanie, on doit prendre 4 fois une portion de 3 objets équivalente aux objets de Gustave. L'élève peut dire : « Si Gustave a 4 fois moins que Mélanie, alors Mélanie a 4 fois plus que Gustave. Alors si on prend la quantité de Gustave 4 fois, on obtient celle de Mélanie. Il s'agit donc d'une multiplication. » L'opération sera 4×3=.

Comparaison (recherche de la relation[1])

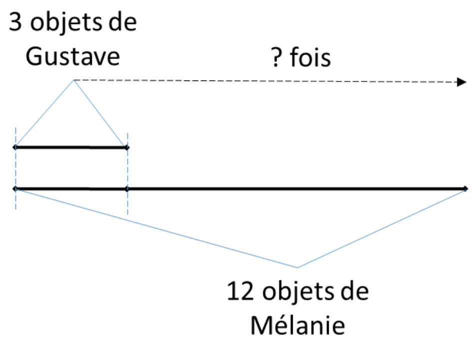
Problème typique : Gustave a 3 objets et Mélanie en a 12. Mélanie a combien de fois plus d'objets que Gustave?

Analyse : Gustave et Mélanie ont chacun leurs propres objets. On imagine les objets de Mélanie en ligne et les objets de Gustave en une autre ligne. On doit donc comparer les deux quantités (de façon multiplicative) et trouver combien de fois une quantité « entre » ou « est contenue » dans l'autre. On constate que Gustave a moins d'objets que Mélanie

[1] Dans des textes gouvernementaux, « relation » signifie une expression de comparaison, par exemple « 3 fois plus », « 2 de plus », etc.

(et Mélanie a plus d'objets que Gustave). On peut donc considérer les objets de Mélanie comme la quantité à mesurer et les objets de Gustave comme étalon. La quantité de Mélanie mesure un nombre de fois (inconnu) la quantité de Gustave (ou si on prend la quantité de Gustave un nombre de fois on obtient la quantité de Mélanie). Nous avons reconnu la **relation de comparaison multiplicative**.

Représentation de la relation :



Construction de la phrase de calcul : Pour trouver le nombre de répétitions, on doit mentalement mesurer (couper) la ligne de Mélanie en utilisant la ligne de Gustave comme étalon. Donc, l'opération est 12÷3=.

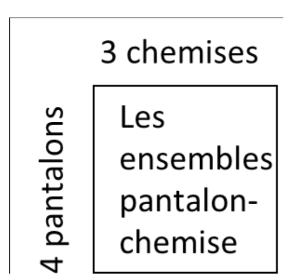
Produit cartésien

Problème typique : Gustave a 3 chemises et 4 pantalons. Combien d'ensembles peut-il porter?

Analyse : Pour imaginer tous les ensembles que Gustave peut créer, on peut construire un tableau. On va croiser dans ce tableau toutes les possibilités de chemises (à l'horizontale) avec toutes les possibilités de pantalons (à la verticale). Le rectangle du tableau a deux dimensions qui correspondent à 3 (chemises) et 4 (pantalons). Le rectangle représente donc toutes les possibilités d'ensembles pantalon-chemise (la quantité recherchée). Nous avons reconnu la **relation multiplicative de produit Cartésien**.

Représentation de la relation :

	C1	C2	C3
P1			
P2			
P3			
P4			

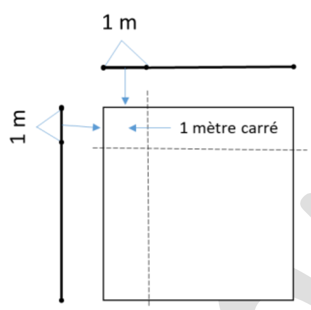


Construction de la phrase de calcul : Notre tableau (rectangle) contient 3 colonnes et 4 rangées. Chaque case de ce tableau contient un ensemble pantalon-chemise. Pour trouver le nombre de cases, on peut prendre 4 fois 3 cases d'une rangée ou on peut prendre 3 fois 4 cases d'une colonne. L'élève peut dire : « Je peux voir le rectangle comme composé de 4 rangées de 3 cases ou comme 3 colonnes de 4 cases. Il s'agit de composition de groupes égaux et alors, d'une multiplication. » Les phrases de calcule : 4×3= ou 3×4=.

Aire

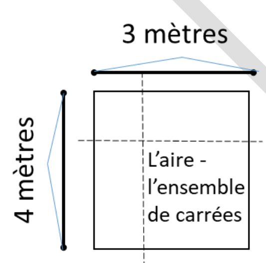
Problème typique : Une platebande mesure 4 m de largeur par 3 m de longueur. Quelle est l'aire de cette platebande?

Analyse : Pour comprendre la situation, on doit se rappeler que les unités de mesure de l'aire sont les objets à 2 dimensions (dans notre situation ce sont les mètres **carrés**) et les unités de mesure de longueur sont les objets de 1 dimension (dans notre situation ce sont les mètres). Chaque carrée-unité (ici des mètres-carrés) de l'aire de la platebande est une combinaison d'un mètre de largeur avec un mètre de longueur.



En sachant le **nombre de mètres** (mesures) de largeur et de longueur de la platebande, on doit déterminer le nombre **de carrés** (mètres carrés) qui correspond à l'aire de la platebande. Si on combine chaque mètre de longueur avec chaque mètre de largeur, on obtient toutes les carrées-unités de la platebande. La largeur et la longueur sont donc deux dimensions et l'aire de platebande est la quantité mesurée. Nous avons reconnu la **relation multiplicative de produit Cartésien**.

Représentation de la relation :

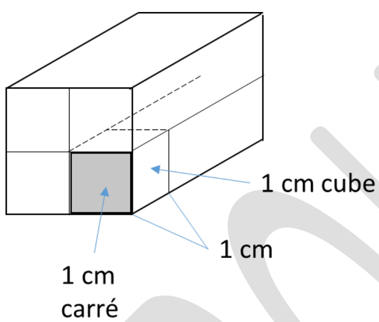


Construction de la phrase de calcul : On voit sur la représentation que l'aire de la platebande représente 4 rangées de 3 carrés ou 3 colonnes de 4 carrés. On peut donc utiliser une des opérations suivantes : 4×3= ou 3×4=. Il est important de clarifier avec les élèves que ces phrases ne signifient pas « 4 m fois 3 m », mais plutôt « 4 fois 3 carrés » ou « 3 fois 4 carrés ».

Volume

Problème : Une boîte ayant la forme d'un prisme rectangulaire mesure 2 cm de largeur, 2 cm de profondeur et quelques cm de hauteur. Son volume est 12 cm cubes. Quelle est la hauteur de cette boîte?

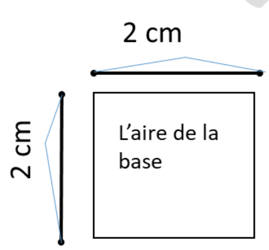
Analyse : Pour comprendre la situation, on doit réaliser une analyse similaire à celle du problème de l'aire. Une unité de volume est un objet à 3 dimensions et les unités de largeur, longueur et profondeur sont des objets à 1 dimension. Tout d'abord, on peut combiner les unités de largeur et celles de longueur pour construire la surface du fond du prisme, comme un ensemble de carrés-unités. Il s'agit donc de la **relation de produit Cartésien** qui permet de déterminer l'aire comme présentée précédemment**.** Pour construire une unité de volume (cm cube), on doit combiner un carré-unité avec la troisième unité de longueur.



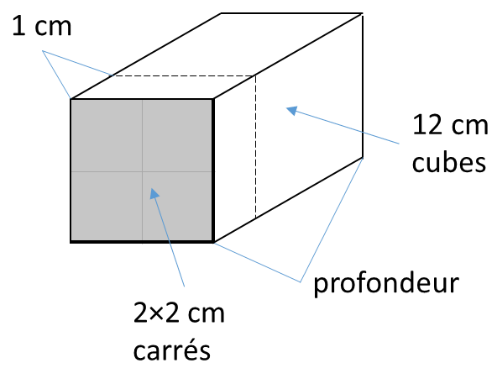
Pour obtenir tous les cubes-unités qui composent le volume du prisme, on doit alors combiner chaque carré-unité avec chaque unité de la troisième dimension. Cette combinaison présente une autre relation **multiplicative de produit Cartésien** où le volume joue le rôle de la quantité mesurée, et l'aire de la base et la profondeur sont les dimensions.

Représentation des relations :

1. Relation de produit Cartésien 1: aire-longueur-largeur



2. Relation de produit Cartésien 2: volume-aire-profondeur



Construction de la phrase de calcul : On voit sur la représentation que la surface du prisme représente 2 rangées de 2 carrées. On peut donc trouver que la surface est composée de 2×2=4 cm carrés. Sur la représentation 2, on voit que la quantité mesurée (volume) est connue ainsi qu'une des deux dimensions (l'aire). Pour trouver l'autre dimension, on doit couper mentalement le prisme (le volume) en prismes égaux, plus petits, telles que leur profondeur soit une unité de longueur (1 cm). Car l'aire du fond est 4 carrés-unités, chaque tranche est composée de 4 cubes-unités. Le nombre de tranches correspondra à la profondeur du grand prisme. L'élève peut dire : « Je coupe le prisme en tranches égales et en même temps je coupe la longueur par 1 cm. Le nombre de tranches soit le nombre de centimètres de longueur. Couper en parties égales c'est une division. » L'opération est donc 12÷(2×2)=.

Nous devons constater que la situation de volume est plus complexe que les autres et comporte deux relations internes. Avec l'expérience, les élèves vont arriver à généraliser les situations similaires en une relation à 3 dimensions Volume-longueur-largeur-profondeur. Toutefois au début, il est important de travailler de près avec les relations de base, plus simples.

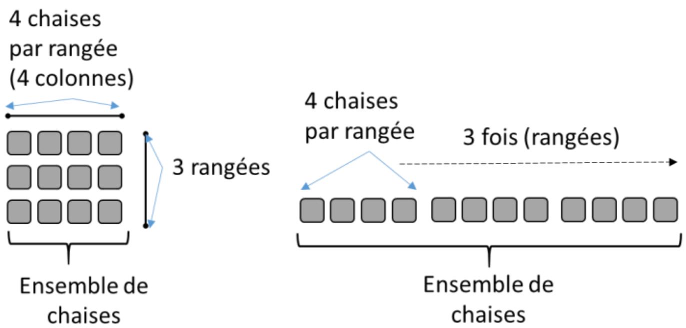
Disposition rectangulaire

Problème typique : Dans la classe, il y a 3 rangées contenant 4 pupitres chacune. Combien y a-t-il de pupitres dans cette classe?

Analyse 1 : Pour comprendre cette situation, on peut imaginer un rectangle, figure à 2 dimensions, composée de pupitres placés en rangées identiques et colonnes identiques. Dans ce cas, on peut dire que le nombre de rangées est une dimension de cette figure et le nombre de pupitres dans chaque rangée détermine le nombre de colonnes et constitue donc la deuxième dimension de la figure. On peut comprendre cette situation comme une **relation multiplicative de produit Cartésien**.

Analyse 2 : On peut dire que l'ensemble des pupitres est composé de groupes identiques (rangées) de pupitres. On peut, mentalement, placer les rangées l'une après l'autre en ligne. Il s'agit donc d'une **relation multiplicative de composition**.

Représentations des relations possibles :



Construction de la phrase de calcul : Si on utilise la relation produit Cartésien, on doit multiplier les deux dimensions pour obtenir l'ensemble de chaises : 4×3= ou 3×4=. Si on utilise la relation multiplicative de composition, on doit prendre 3 fois le groupe de 4 chaises 3×4= (ou 4 chaises 3 fois donc 4x3).

Nous avons analysé de nombreux problèmes « typiques » identifiés dans les programmes de formation. Nous avons démontré que tous ces problèmes peuvent être analysés et résolus à l'aide de seulement trois types de relations multiplicatives.

Quelqu'un peut suggérer que de point de vue relationnel, il existe seulement trois classes de problèmes : mesure (ou groupes égaux), comparaison multiplicative et produit Cartésien. Toutefois, le dernier exemple (disposition rectangulaire) nous montre que plusieurs situations peuvent être interprétées à l'aide de différentes relations à la fois. Au fond, les représentations et les relations ne sont que des outils pour la pensée. C'est la force de notre imagination qui nous permet de traiter les situations de façon flexible et ainsi profiter de notre connaissance des relations variées pour résoudre les problèmes. On ne doit pas parler de trois classes de problèmes, mais plutôt de trois façons de voir les situations. Plutôt qu'apprendre à résoudre des problèmes typiques, notre objectif est de développer les façons de penser – notre pensée relationnelle.

Dans le chapitre 5.2, nous allons démontrer comment on peut utiliser différents types de relations et remplacer l'une par l'autre dans une même situation. Ce caractère transformateur de la pensée relationnelle contribue à la richesse de notre raisonnement mathématique et au succès de la résolution de problèmes.