Le paradigme relationnel et le développement de la pensée algébrique

Potentiel théorique et pratique

Elena Polotskaia, UQO
Annie Savard, McGill University

Historique

La résolution de problèmes écrits portant sur les quatre opérations arithmétiques a été étudiée depuis des années:

- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 1, pp. 763–787). IAP. http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=Cww16Egbp40C&pgis=1
- Leung, S.-K. S. (2009). Research efforts on probing students'conceptions in mathematics and in reality: Structuring problems, solving problems, and justifying solutions. In L. Verschaffel, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds* (pp. 211–223).
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Craddock, C., Hollenbeck, K. N., Hamlett, C. L., & Schatschneider, C. (2008). Effects of Small-Group Tutoring With and Without Validated Classroom Instruction on At-Risk Students ' Math Problem Solving : Are Two Tiers of Prevention Better Than One ? *Journal of Educational Psychology*, *100*(3), 491–509. https://doi.org/10.1037/0022-0663.100.3.491
- Pape, S. J. (2004). Middle school children's problem-solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 187. https://doi.org/10.2307/30034912
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1980). Children's solution processes in elementary arithmetic problems: analysis and improvement. *American Educational Research Association Annual Meeting*, *19*, 1–42.
- Schoenfeld, A. H. (1983). The Wild, Wild, Wild, Wild, Wild World of Problem Solving (A Review of Sorts). *For the Learning of Mathematics*, *3*(3), 40–47.
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 428–441. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.5.0428
- Novotná, J. (1998). Pictorial representation as a means of grasping word problem structures. *Psychology of Mathematics Education 12*. http://people.fjfi.cvut.cz/novotant/jarmila.novotna/POME99.pdf
- Radford, L. (1996). La résolution de problèmes: comprendre puis résoudre. *Bulletin AMQ*, *XXXVI*(3), 19–30.
- Verschaffel, L., Corte, E. De, & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils ' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Word Journal Of The International Linguistic Association*, *30*(3), 265–285.
- Fagnant, A. (2005). The use of mathematical symholism in problem solving: An empirical study carried out in grade one in the French community of Belgium. *European Journal of Psychology of Education*, *XX*(4), 355–367.
- Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*(5–6), 365–382. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0048-x
- De Corte, E. (2012). Résoudre des problèmes mathématiques: de la modélisation superficielle vers la modélisation experte. *GDM 2012: La Recherche Sur La Résolution Des Problèmes En Mathématiques: Au-Delà d'une Compétence, Au-Delà Des Constats*, 1–11.
- Lajoie, C., & Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation Et Francophonie*, *42*(2), 7–23. https://doi.org/10.7202/1027903ar
- Vergnaud, G. (1982). *A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems*.

Conclusions

- Le problème possède une structure mathématique.
- Pour résoudre, il faut comprendre le problème – sa structure mathématique.
- L'élève doit représenter le problème.

Nos questions

Comment faire?

Qu'est-ce que c'est?

- Le problème possède une structure mathématique.
- Pour résoudre, il faut comprendre le problème – sa structure mathématique.
- L'élève doit représenter le problème.

Quoi et comment représenter?

Opérations vs relations

- Dans le programme: 4 opérations et leur sens.
- On enseigne les opérations comme des « actions ».
- Pourtant, pour un mathématicien, 2+3=5 représente une structure (objet), une équivalence de valeurs (2+3) et (5).
- Dans des classifications des problèmes additives (ex. Vergnaud, 1982), on distingue les problèmes de changement et d'état.
- Un problème compris comme un changement (addition) peut demander une soustraction pour la solution.
- Davydov (2008) propose qu'il existe des relations (objets) quantitatives: les structures composées de 3 éléments de façon à ce que chaque élément puisse être trouvé si les deux autres sont connus.
- Une relation entre les trois éléments détermine les rôles réciproques de chaque élément envers les deux autres.
- **Une opération est au service de la relation**, pour trouver un élément inconnu en utilisant les deux autres.

Historique

- But de l’apprentissage de l’arithmétique – être capable à calculer avec des nombres (actions).
- But de l’apprentissage de l’algèbre – être capable à formuler et « calculer » les équations (structure et équivalence).
- « Calculer » en algèbre – transformer une structure dans une autre structure équivalente.

Selon Davydov (2008), le but de l’apprentissage des mathématiques est le développement de la pensée mathématique.

Le paradigme relationnel

- Le paradigme relationnel est une vision qui met de l'avant la pensée relationnelle – habileté de reconnaitre les relations quantitatives, opérer sur ces relations pour déduire logiquement de nouvelles informations.

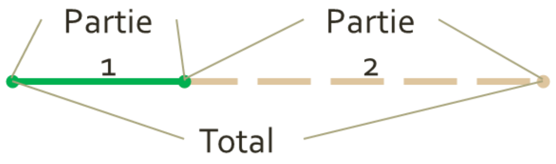
$$x + y = z$$

$$x \times y = z$$

Les relations élémentaires

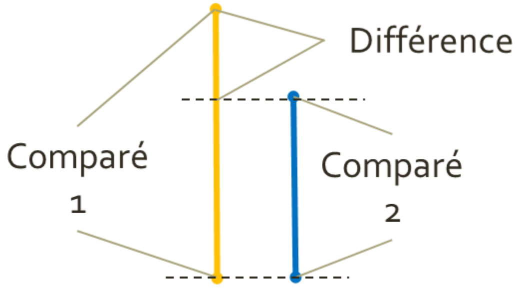
Relation additive de composition

Total, Partie 1, Partie 2



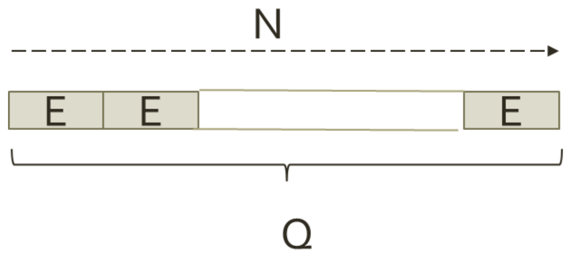
Relation additive de comparaison

Comparé 1, Comparé 2, Différence



Relation multiplicative de composition

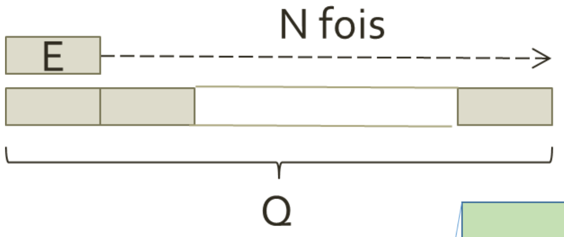
Quantité mesurée; Unité de mesure (Étalon); Nombre



Relation multiplicative de comparaison

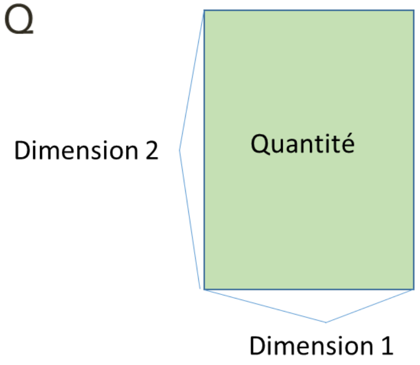
Quantité mesurée; unité de mesure (Étalon); Nombre

Comparé 1; Comparé 2; Coefficient



Relation multiplicative de produit cartésien

Quantité; Dimension 1; Dimension 2



Résolution «ce que je sais»

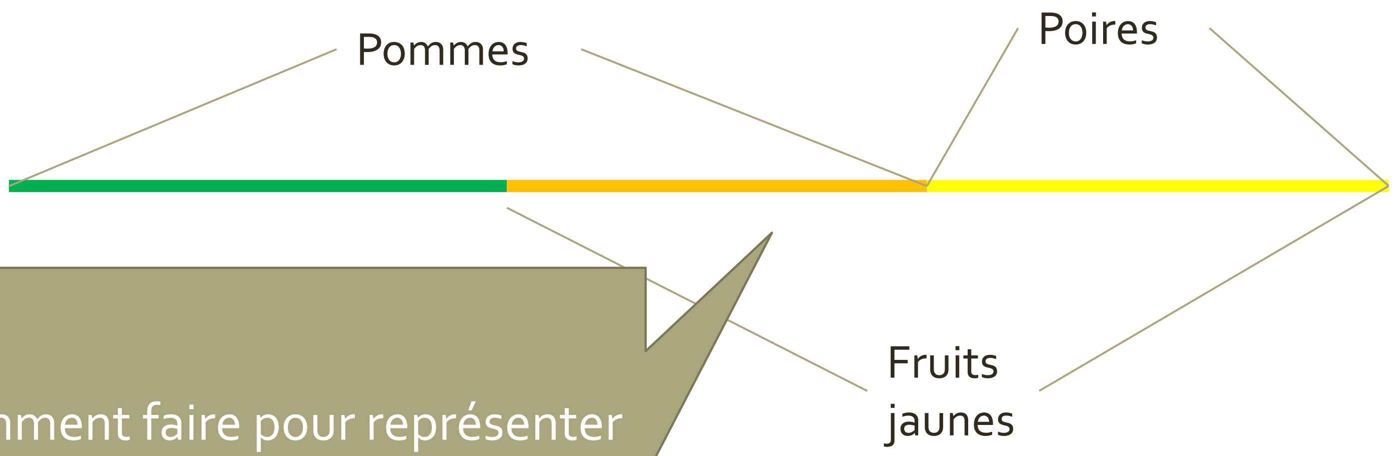
[redacted] ***23*** [redacted] ***17*** [redacted] ***8*** [redacted]. Combien de fruits jaunes Mélanie a-t-elle achetés?

Résolution «relationnelle»

Mélanie a acheté [illegible] pommes et [illegible] poires jaunes. Quelques-unes de ces pommes sont jaunes et les [illegible] autres sont vertes. Combien de fruits jaunes Mélanie a-t-elle achetés?

Représenter les relations

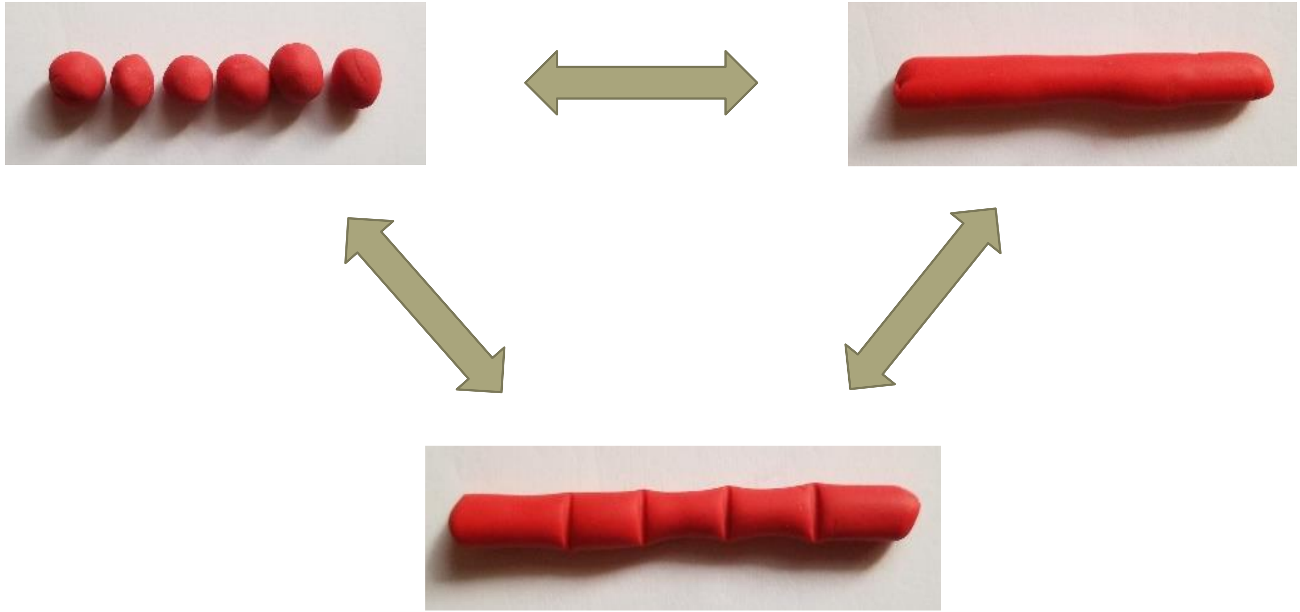
Mélanie a acheté pommes et poires jaunes. Quelques-unes de ces pommes sont jaunes et les autres sont vertes. Combien de fruits jaunes Mélanie a-t-elle achetés?



Comment faire pour représenter une collection d'objets (un nombre connu ou inconnu) par une ligne?

Continu vs discret

- L'utilisation de la pâte à modeler peut soutenir une généralisation algébrique du nombre.



Nos recherches

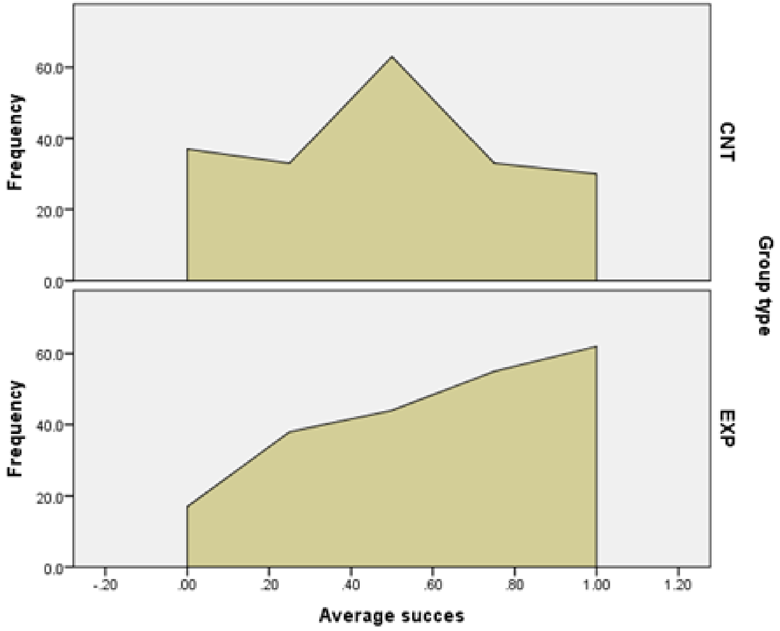
- Structures additives: 2011-2014. Financé par MESL
- Structures multiplicatives: 2015-2017. Financé par MELS
- Adaptation scolaire primaire et secondaire: 2015-2019. Financé par CRSH

Méthodologie

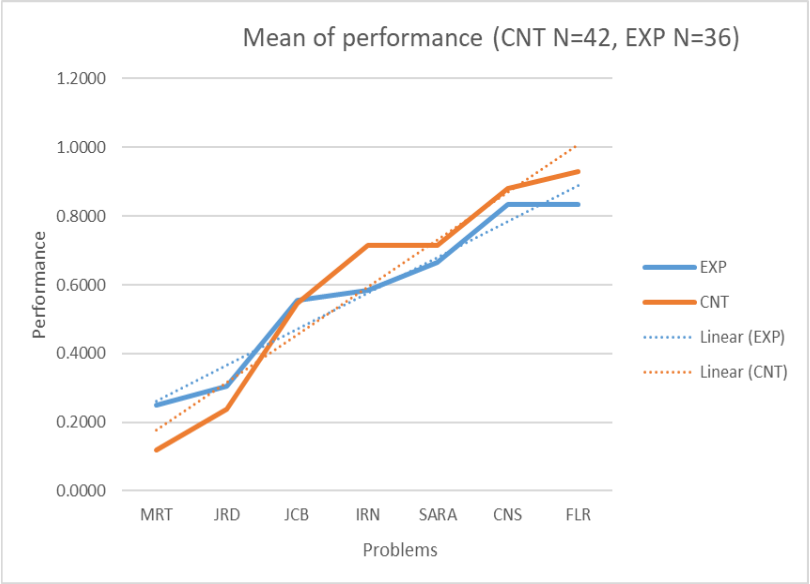
- Collaboration avec les écoles et les commissions scolaires sous forme de formation-expérimentation
- Enseignement expérimental
- Cycle: formation-enseignement-analyse
- Données: enregistrement vidéo en classe, entrevues individuelles avec les élèves (résolution de problèmes), test (papier-crayon) de résolution de problèmes.

Approche équilibrée: Quelques résultats statistiques

Relations additives



Relations multiplicatives



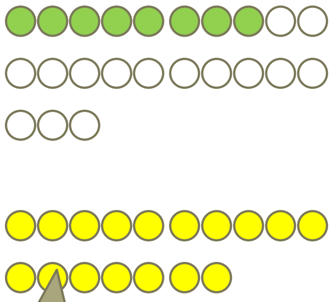
Pensée algébrique

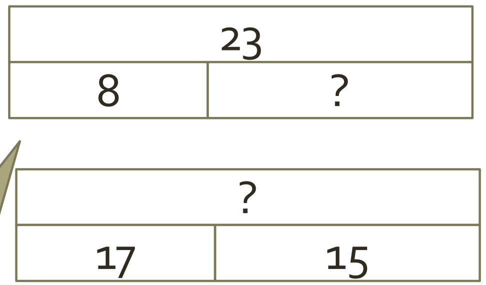
- Nous avons défini la pensée algébrique comme l'analyse des quantités (connues, inconnues et variables) et **les relations entre ces quantités** pour produire des inférences logiques et **déduire** une information nouvelle sur d'autres quantités et d'**autres relations**.

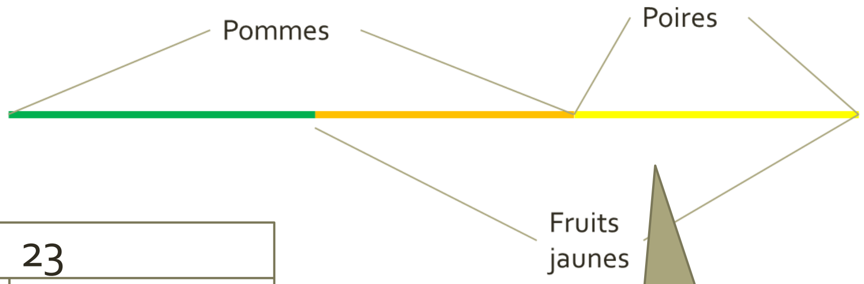
Quelle résolution implique une pensée algébrique?

Mélanie a acheté ***23*** pommes et ***17*** poires jaunes. Quelques-unes de ces pommes sont jaunes et les ***8*** autres sont vertes. Combien de fruits jaunes Mélanie a-t-elle achetés?

Mélanie a acheté ___ pommes et ___ poires jaunes. Quelques-unes de ces pommes sont jaunes et les ___ autres sont vertes. Combien de fruits jaunes Mélanie a-t-elle achetés?







Construction des nombres

Application des schémas

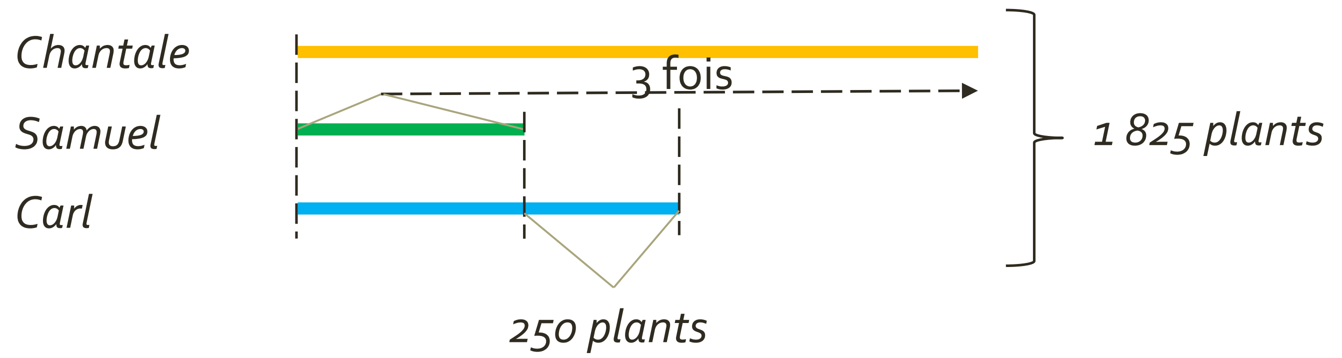
Construction des relations

Exemple « algébrique »

Trois agriculteurs préparent la culture d'un grand champ. Chantale sème trois fois plus de plants de maïs que Samuel. Samuel sème 250 plants de moins que Carl. Les trois ensembles sèment 1 825 plants de maïs. Qui a semé le plus de plants de maïs et combien en a-t-il semé ?

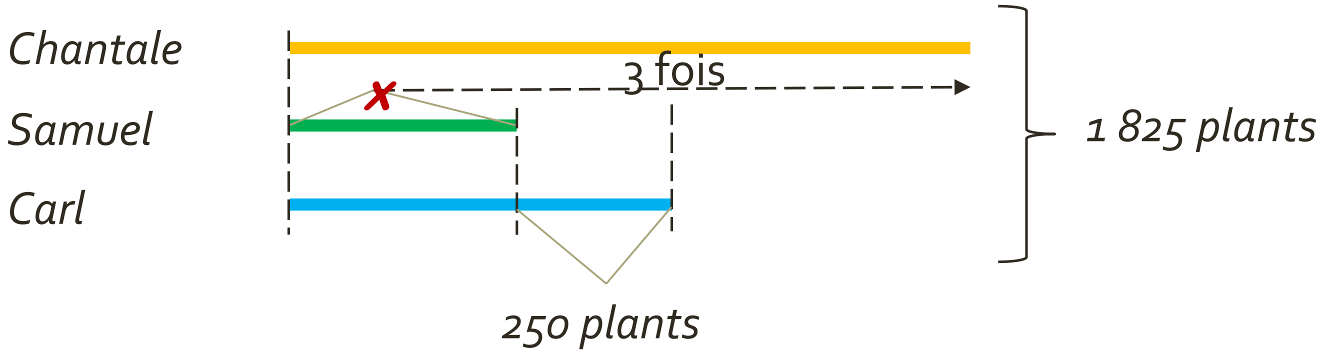
Commentaires (futurs enseignants, enseignants et chercheurs):

- *Les élèves peuvent résoudre ce type de problèmes par essais et erreurs!*
- *Je suis bonne en maths, mais je n'étais pas capable de le faire.*
- *C'est de l'algèbre.*



Démarche algébrique

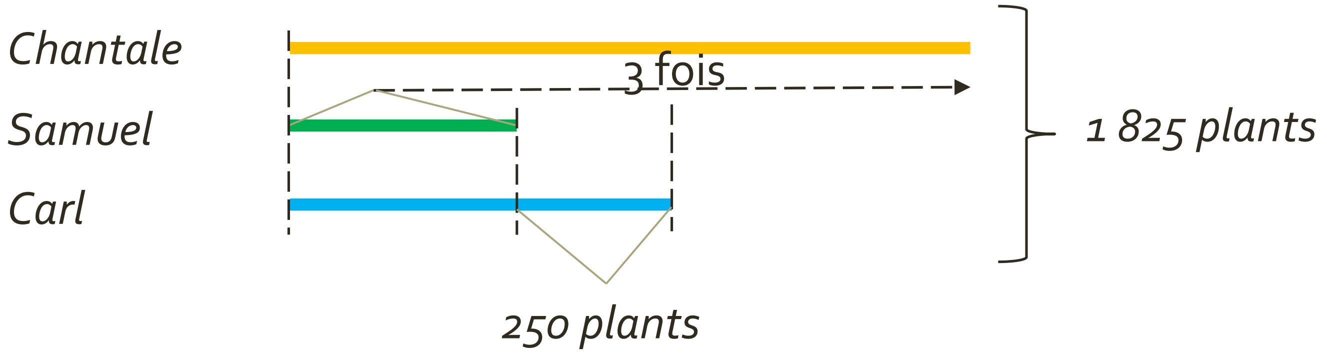
Trois agriculteurs préparent la culture d'un grand champ. Chantale sème trois fois plus de plants de maïs que Samuel. Samuel sème 250 plants de moins que Carl. Les trois ensembles sèment 1 825 plants de maïs. Qui a semé le plus de plants de maïs et combien en a-t-il semé ?



$$x + 3x + (x + 250) = 1825$$

Démarche arithmétique

Trois agriculteurs préparent la culture d'un grand champ. Chantale sème trois fois plus de plants de maïs que Samuel. Samuel sème 250 plants de moins que Carl. Les trois ensembles sèment 1 825 plants de maïs. Qui a semé le plus de plants de maïs et combien en a-t-il semé ?



$$1825 - 250 = 1575$$
$$1575 \div 5 = 315 \text{ (Samuel)}$$
$$315 \times 3 = 945 \text{(Chantale)}$$
$$315 + 250 = 565 \text{(Carl)}$$

Conclusion

- La pensée relationnelle (dans le paradigme relationnel) est fondatrice dans l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre.
- Elle est accessible aux enfants du primaire dès le début d'apprentissage.

Obstacles

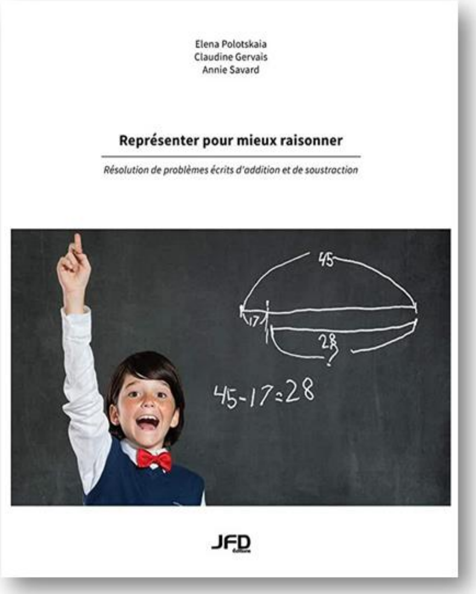
- Éléments de la tradition mathématique scolaire:
  - La multiplication est une **addition répétée**.
  - Le nombre est le résultat d'un **comptage**.
  - Le but de la résolution d'un problème est la **réponse**.
  - Le désir (de l'enseignant) de réussir la tâche (le thème) **le plus vite possible**.
  - L'élève doit faire **sa propre représentation** du problème.

Propositions

- Reconnaitre de façon formelle les relations comme objets d'apprentissage.
- Inclure l'apprentissage des relations de base dans le programme.
- Réorienter les tâches de résolution de problèmes vers l'analyse relationnelle **et la modélisation des relations**.

Nos publications

- Polotskaia, E., Gervais, C. et Savard, A. (2019). ***Représenter pour mieux raisonner****. Résolution de problèmes écrits d'addition et de soustraction*. Éditions JFD.
- Polotskaia, E., Gélinas, M.-S., Gervais, C. et Savard, A. (à paraitre en 2022). ***Représenter pour mieux raisonner****. Résolution de problèmes écrits de multiplication et de division*. Éditions JFD.
- Polotskaia, E., Savard, A., Fellus, O. O., & Freiman, V. (à paraitre). Equilibrated Development Approach to Word Problem Solving in Elementary Grades. In K. M. Robinson, D. Kotsopoulos, & A. Dubé (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Middle Childhood and Early Adolescence: Integrating Interdisciplinary Research into Practice*. Springer.
- Tremblay, S., Polotskaia, E., & Passaro, V. (2020). Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire. *Revue Québécoise de Didactique Des Mathématiques*, *2*, 78–109.
- Polotskaia, E. (2020). Regards croisés sur l'apprentissage des mathématiques. Le cas de la Théorie des situations didactiques et de la Théorie de l'instruction développementale. *For the Learning of Mathematics*, *40*(1), 2–8. https://flm-journal.org/Articles/2F9F2C8FBD23484E62D5124F0E17B5.pdf



Merci!

- Questions?